1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4 개　② 8 개　③ 10 개　④ 13 개　⑤ 15 개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면
$x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.
$\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$
$\Rightarrow k < 16$
$\therefore$ 자연수 k 의 개수 : 15 개

2. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha < \beta)$ 이라 하면
$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = 2a \quad \cdots$ ㉠
이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이므로
$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
$(\beta - \alpha)^2 = 4$
$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

3. 부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$이고 $f(x)=ax^2+bx+c$일 때, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

부등식 $ax^2+bx+c \geq 0$의 해가 $-3 \leq x \leq 2$일 때 $a<0$이고,

$$ax^2+bx+c \geq 0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow ax^2+ax-6a \geq 0$$

$\therefore\ b=a,\ c=-6a$

따라서, $f(x)=ax^2+ax-6a$이므로

$f(x)=0$ 의 두 근은 $-3,\ 2$이다.

즉, $f(-3)=0$ 또는 $f(2)=0$이다.

한편, 함수 $y=f(3x-2)$의 그래프와 x 축과의 교점의 x좌표는 방정식 $f(3x-2)=0$의 실근과 같으므로

$f(3x-2)=0$의 두 근은

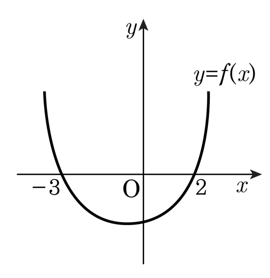
$3x-2=-3$ 또는 $3x-2=2$에서

$x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$

따라서, 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}$$

4. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개　② 2 개　③ 3 개
④ 4 개　⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3)=0,\ f(2)=0$ 이므로
방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 근은
(i) $x^2-1=-3$ 일 때, $x^2=-2 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{3}$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

5. 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 x축과는 접하고 직선 $y = 4x$와는 서로 만나지 않을 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $a > -1$　　② $a < -1$　　③ $a > 0$

④ $a < 1$　　⑤ $a > 1$

해설

포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x축과는 접하므로
이차방정식 $y = x^2 + 2ax + b = 0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b = 0 \quad \therefore b = a^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$가 직선 $y = 4x$와 서로 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 4x$,
즉 $x^2 + 2(a-2)x + b = 0$의 판별식을 D'이라 할 때

$$\frac{D'}{4} = (a-2)^2 - b < 0 \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $(a-2)^2 - a^2 < 0, \; -4a + 4 < 0$

$\therefore a > 1$

6. 직선 $y=2x+a$ 와 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

직선 $y=2x+a$ 와 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로
이차방정식 $2x+a=x^2-1$, 즉 $x^2-2x-a-1=0$ 의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1+a+1=0$
$\therefore a=-2$

7. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이
0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

1) $ax + 1 = x^2 + x + 2$	2) $ax + 1 = -x^2 + 4x$
$\Rightarrow x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$	$\Rightarrow x^2 + (a - 4)x + 1 = 0$
$D = (a - 1)^2 - 4 < 0$	$\Rightarrow D = (a - 4)^2 - 4 < 0$
$\Rightarrow -1 < a < 3$	$\Rightarrow 2 < a < 6$

$\therefore$ 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$
$\therefore \alpha + \beta = 5$

8. 원점을 지나고 이차함수 $f(x) = x^2 + ax + 2$에 접하는 두 개의 직선이 서로 직교할 때, 점 $(a,\ b)$의 자취를 나타내는 방정식은? (단, $b > 0$이다.)

① $b = \frac{1}{2}(a+1)$　② $b = \frac{1}{8}(a^2+1)$　③ $b = \frac{1}{4}a^2$
④ $b = \frac{1}{6}(a-3)^2$　⑤ $b = \frac{1}{12}a^2 - 4$

해설

원점을 지나는 직선 $y = mx$라 두면,
$x^2 + ax + 2b = mx$
$x^2 + (a-m)x + 2b = 0$

$$\begin{aligned} D &= (a-m)^2 - 8b = 0 \\ &= m^2 - 2am + a^2 - 8b = 0 \end{aligned}$$

두 직선이 직교할 때, 기울기의 곱은 -1 이므로,
근과 계수의 관계에서
$a^2 - 8b = -1$
$\therefore\ b = \frac{1}{8}(a^2+1)$

9. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$의 그래프와 직선 $y = 5x + b$가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 $(3,\ 17)$일 때, $a + b$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면
α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$의 두 실근이다.
$2x^2 + (a-5)x + 12 - b = 0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -\dfrac{a-5}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 3이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{2} = 3$에서 $\alpha + \beta = 6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{a-5}{2} = 6$

$\therefore a = -7$

또, 점 $(3,\ 17)$은 직선 $y = 5x+b$ 위의 점이므로 $17 = 5\cdot3+b$ $\therefore$ $b = 2$

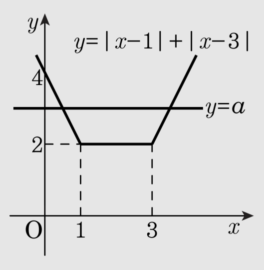
$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$

10. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$　② $a>1$　③ $a<2$　④ $a>2$　⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
$a>2$



11. 함수 $y = x^2 - 2x + a$의 최솟값이 -3일 때, 상수 a의 값을 정하고, 함수 $y = ax^2 - 2x + 1$의 최댓값 또는 최솟값을 구하면?

① 최솟값 $\frac{3}{2}$
② 최댓값 $\frac{3}{2}$
③ 최솟값 $-\frac{1}{2}$
④ 최댓값 $-\frac{1}{2}$
⑤ 최솟값 $-\frac{3}{2}$

해설

$y = (x-1)^2 + a - 1$ 이므로
$x = 1$ 일 때, 최솟값이 $a - 1$ 이다.
$a - 1 = -3 \quad \therefore \ a = -2$
$y = -2x^2 - 2x + 1 = -2(x^2 + x) + 1$
$= -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$
따라서 $x = -\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$

12. x가 실수일 때, 이차함수$y = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 가질 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a < 0$	㉡ $4a + b = 0$	㉢ $4a - c = -3$

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖는 이차함수는
$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$ 이다.
$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3$ 이므로
$b = -4a$, $c = 4a + 3$ 이다.

13. $-2 \le x \le 0$ 에서 이차함수 $y=-2x^2+4x+a+1$ 이 최댓값 1 을 가질 때, 상수 a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y=-2x^2+4x+a+1=-2(x-1)^2+a+3$ 이
이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표 1 이
x 의 값의 범위 $-2 \le x \le 0$ 에 속하지 않으므로
주어진 이차함수는 $x=-2$ 일 때 최솟값을 갖고
$x=0$ 일 때 최댓값을 갖는다.
최댓값이 1 이므로 $a+1=1$ $\quad\therefore a=0$

14. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$
$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$
따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$
$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서
$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

15. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $(0 \le x \le 3)$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

16. 함수 $y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 이 $x=m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 에서
$x^2+4x+5=t$ 로 놓으면
$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x+5\right)+4$
$=-t^2-2t+4=-(t+1)^2+5$
그런데 $t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ 이므로
$t=1$, 즉 $x=-2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m=-2,\ M=1$
$\therefore M+m=-1$

17. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t$ 라 하면

$x = 2t-1$, $y = 5t+3$, $z = 3t-2$ 이므로

$x^2 - y^2 + z^2 = (2t-1)^2 - (5t+3)^2 + (3t-2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \frac{1}{2}$, $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$

18. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2 - y^2 = 4$ 에서 $y^2 = x^2 - 4 \cdots\cdots$ ㉠

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

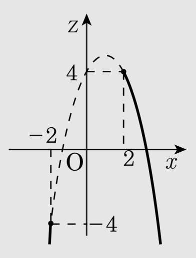
$\therefore\ x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$

$= -(x-1)^2 + 5$

$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2$, $x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

19. x에 관한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$이 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 최솟값을 구하여라. (단, a는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0$에서 $a^2 \geq 3$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2 - 2(9 - 2a^2) \\ &= 4a^2 - 18 + 4a^2 = 8a^2 - 18 \end{aligned}$$

$\therefore a^2 + \beta^2 \geq 8 \times 3 - 18 = 6$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$의 최솟값은 6

20. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

21. x, y가 실수일 때, $-x^2-y^2-4x+6y-12$의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-x^2-y^2-4x+6y-12=-(x+2)^2-(y-3)^2+1$

이 때, x, y가 실수이므로

$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$

$\therefore -x^2-y^2-4x+6y-12 \leq 1$

따라서 $x=-2,\ y=3$일 때

주어진 식의 최댓값은 1이다.

22. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

① 최댓값 1, 최솟값 -3
② 최댓값 3, 최솟값 -1
③ 최댓값 3, 최솟값 1
④ 최댓값 -1, 최솟값 -3
⑤ 최댓값 4, 최솟값 -1

해설

x에 관해 내림차순으로 정리하면
$4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$
실수의 해를 가지므로
$\frac{D}{4} = (-8)^2 - 4(y^2 + 2y + 13) \geq 0$
$\therefore\ y^2 + 2y - 3 \leq 0$
$\therefore\ (y+3)(y-1) \leq 0$
$\therefore\ -3 \leq y \leq 1$
따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 -3

23. 실수 x, y가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을 만족시킬 때, x의 최댓값과 y의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2} - 1$ ② $2\sqrt{2} + 1$ ③ $2\sqrt{2} + 2$
④ $\sqrt{2} + 4$ ⑤ $\sqrt{2} + 5$

해설

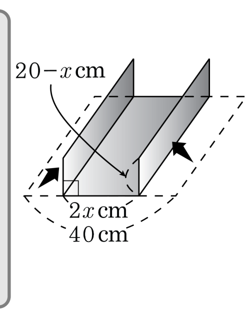
$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을
(i) x에 대한 내림차순으로 정리하면
$x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0$에서 x가 실수이므로
$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0,\ y^2 \leq 4$
$\therefore\ -2 \leq y \leq 2$
따라서, y의 최댓값은 2이다.
(ii) y에 대한 내림차순으로 정리하면
$2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$에서 y가 실수이므로
$\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0,\ x^2 \leq 8$
$\therefore\ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$
따라서, x의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.
(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$

24. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

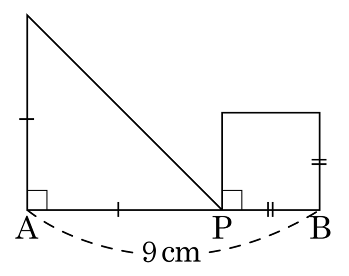
① 10　　② 8　　③ 6　　④ 4　　⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x)=-2x^2+40x=-2(x^2-20x+200)+100=-2(x-10)^2+200$
$\therefore\ x=10$ 일 때 넓이가 최대이다.



25. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm　　② 5.5cm　　③ 5cm

④ 4.5cm　　⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.