

1. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4 개

② 8 개

③ 10 개

④ 13 개

⑤ 15 개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면

$x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.

$$\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$$

$$\Rightarrow k < 16$$

\therefore 자연수 k 의 개수 : 15 개

2. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{AB} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

A(α , 0), B(β , 0) ($\alpha < \beta$) 이라 하면

α , β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = 2a \quad \dots \textcircled{㉠}$$

이 때, $\overline{AB} = 2$ 이므로

$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면

$$(\beta - \alpha)^2 = 4$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \dots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

3. 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 이고 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 일 때, 함수 $y = f(3x - 2)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해가 $-3 \leq x \leq 2$ 일 때 $a < 0$ 이고,
 $ax^2 + bx + c \geq 0 \Leftrightarrow a(x+3)(x-2) \geq 0$
 $\Leftrightarrow ax^2 + ax - 6a \geq 0$

$$\therefore b = a, c = -6a$$

따라서, $f(x) = ax^2 + ax - 6a$ 이므로

$f(x) = 0$ 의 두 근은 $-3, 2$ 이다.

즉, $f(-3) = 0$ 또는 $f(2) = 0$ 이다.

한편, 함수 $y = f(3x - 2)$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 x 좌표는 방정식 $f(3x - 2) = 0$ 의 실근과 같으므로

$f(3x - 2) = 0$ 의 두 근은

$$3x - 2 = -3 \text{ 또는 } 3x - 2 = 2 \text{에서}$$

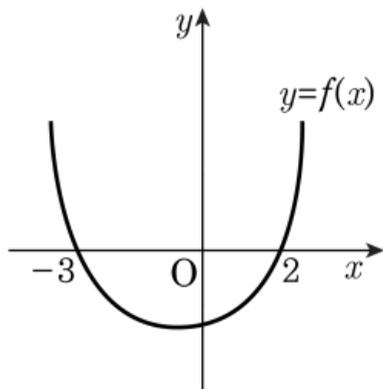
$$x = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}$$

따라서, 구하는 두 점 사이의 거리는

$$\frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

4. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 5개



해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로
방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore x = \pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm\sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

5. 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x 축과는 접하고 직선 $y = 4x$ 와는 서로 만나지 않을 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a > -1$

② $a < -1$

③ $a > 0$

④ $a < 1$

⑤ $a > 1$

해설

포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 x 축과는 접하므로
이차방정식 $y = x^2 + 2ax + b = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - b = 0 \quad \therefore b = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또, 포물선 $y = x^2 + 2ax + b$ 가 직선 $y = 4x$ 와 서로 만나지 않으려면

이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 4x$,

즉 $x^2 + 2(a-2)x + b = 0$ 의 판별식을 D' 이라 할 때

$$\frac{D'}{4} = (a-2)^2 - b < 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $(a-2)^2 - a^2 < 0$, $-4a + 4 < 0$

$\therefore a > 1$

6. 직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로

이차방정식 $2x + a = x^2 - 1$, 즉 $x^2 - 2x - a - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + a + 1 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

7. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -5

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이 0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

$$1) ax + 1 = x^2 + x + 2 \quad 2) ax + 1 = -x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow x^2 + (1-a)x + 1 = 0 \quad \Rightarrow x^2 + (a-4)x + 1 = 0$$

$$D = (a-1)^2 - 4 < 0 \quad \Rightarrow D = (a-4)^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -1 < a < 3 \quad \Rightarrow 2 < a < 6$$

\therefore 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$

$$\therefore \alpha + \beta = 5$$

8. 원점을 지나고 이차함수 $f(x) = x^2 + ax + 2$ 에 접하는 두 개의 직선이 서로 직교할 때, 점 (a, b) 의 자취를 나타내는 방정식은? (단, $b > 0$ 이다.)

- ① $b = \frac{1}{2}(a + 1)$ ② $b = \frac{1}{8}(a^2 + 1)$ ③ $b = \frac{1}{4}a^2$
④ $b = \frac{1}{6}(a - 3)^2$ ⑤ $b = \frac{1}{12}a^2 - 4$

해설

원점을 지나는 직선 $y = mx$ 라 두면,

$$x^2 + ax + 2b = mx$$

$$x^2 + (a - m)x + 2b = 0$$

$$D = (a - m)^2 - 8b = 0$$

$$= m^2 - 2am + a^2 - 8b = 0$$

두 직선이 직교할 때, 기울기의 곱은 -1 이므로,
근과 계수의 관계에서

$$a^2 - 8b = -1$$

$$\therefore b = \frac{1}{8}(a^2 + 1)$$

9. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$ 의 그래프와 직선 $y = 5x + b$ 가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 (3, 17)일 때, $a + b$ 의 값은?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면

α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$ 의 두 실근이다.

$2x^2 + (a - 5)x + 12 - b = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{a - 5}{2} \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

또, 선분 PQ의 중점의 x 좌표가 3이므로

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 3 \text{에서 } \alpha + \beta = 6 \dots\dots \textcircled{\Delta}$$

$$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta} \text{에서 } -\frac{a - 5}{2} = 6$$

$$\therefore a = -7$$

또, 점 (3, 17)은 직선 $y = 5x + b$ 위의 점이므로 $17 = 5 \cdot 3 + b \quad \therefore$

$$b = 2$$

$$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$$

10. x 의 방정식 $|x-1| + |x-3| = a$ 가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$

② $a > 1$

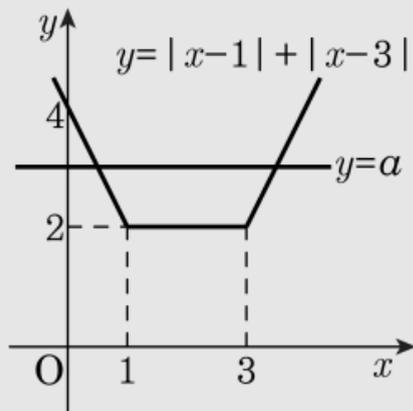
③ $a < 2$

④ $a > 2$

⑤ $a < 3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
 $a > 2$



11. 함수 $y = x^2 - 2x + a$ 의 최솟값이 -3 일 때, 상수 a 의 값을 정하고, 함수 $y = ax^2 - 2x + 1$ 의 최댓값 또는 최솟값을 구하면?

① 최솟값 $\frac{3}{2}$

② 최댓값 $\frac{3}{2}$

③ 최솟값 $-\frac{1}{2}$

④ 최댓값 $-\frac{1}{2}$

⑤ 최솟값 $-\frac{3}{2}$

해설

$$y = (x - 1)^2 + a - 1 \text{ 이므로}$$

$x = 1$ 일 때, 최솟값이 $a - 1$ 이다.

$$a - 1 = -3 \quad \therefore a = -2$$

$$y = -2x^2 - 2x + 1 = -2(x^2 + x) + 1$$

$$= -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

따라서 $x = -\frac{1}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$

12. x 가 실수일 때, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 3을 가질 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a < 0$

㉡ $4a + b = 0$

㉢ $4a - c = -3$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x = 2$ 에서 최댓값 3을 갖는 이차함수는

$y = a(x - 2)^2 + 3 (a < 0)$ 이다.

$ax^2 + bx + c = a(x - 2)^2 + 3$ 이므로

$b = -4a, c = 4a + 3$ 이다.

13. $-2 \leq x \leq 0$ 에서 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + a + 1$ 이 최댓값 1 을 가질 때, 상수 a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$y = -2x^2 + 4x + a + 1 = -2(x-1)^2 + a + 3$ 이
이차함수의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표 1 이
 x 의 값의 범위 $-2 \leq x \leq 0$ 에 속하지 않으므로
주어진 이차함수는 $x = -2$ 일 때 최솟값을 갖고
 $x = 0$ 일 때 최댓값을 갖는다.

최댓값이 1 이므로 $a + 1 = 1 \quad \therefore a = 0$

14. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$$

$$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$$g(a) = -(a-2)^2 + 6 \text{ 에서}$$

$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

15. $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \leq a \leq 2$)

① 1

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

$$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$0 \leq \frac{a}{2} \leq 1 \text{ 이므로}$$

$$\text{최솟값 } m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4},$$

$$\text{최댓값 } M = f(3) = 9 - 3a$$

$$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a + 6)^2 + 18$$

이때, $0 \leq a \leq 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

16. 함수 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 에서

$x^2 + 4x + 5 = t$ 로 놓으면

$$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x + 5) + 4$$

$$= -t^2 - 2t + 4 = -(t + 1)^2 + 5$$

그런데 $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로

$t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.

따라서, $m = -2$, $M = 1$

$$\therefore M + m = -1$$

17. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2$ 이므로

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t - 1)^2 - (5t + 3)^2 + (3t - 2)^2 = -12t^2 - 46t - 4 \\ \dots \textcircled{1}$$

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 이므로

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 $\textcircled{1}$ 은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$-12 \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

18. 실수 x, y 가 $x^2 - y^2 = 4$ 를 만족할 때, $2x - y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$x^2 - y^2 = 4 \text{ 에서 } y^2 = x^2 - 4 \dots\dots \textcircled{7}$$

이 때, $y^2 \geq 0$ 이므로 $x^2 - 4 \geq 0$

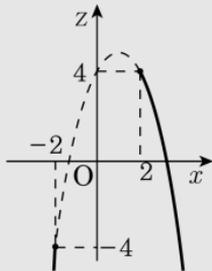
$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$2x - y^2 = 2x - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 4$$

$$= -(x-1)^2 + 5$$

$f(x) = -(x-1)^2 + 5$ 로 놓으면

$x \leq -2, x \geq 2$ 에서 함수 $z = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값은 4 이다.

19. x 에 관한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 9 - 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\frac{D}{4} = a^2 - (9 - 2a^2) \geq 0 \text{에서 } a^2 \geq 3$$

$$\begin{aligned}\alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2 - 2(9 - 2a^2) \\ &= 4a^2 - 18 + 4a^2 = 8a^2 - 18\end{aligned}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 \geq 8 \times 3 - 18 = 6$$

따라서 $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값은 6

20. x, y, z 가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \\ &= (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 - 1 \end{aligned}$$

이 때, x, y, z 가 실수이므로

$$(x + 1)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0, (z - 4)^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$$

따라서 $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,

주어진 식의 최솟값은 -1이다.

21. x, y 가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$ 의 최댓값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x + 2)^2 - (y - 3)^2 + 1$$

이 때, x, y 가 실수이므로

$$(x + 2)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0$$

$$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$$

따라서 $x = -2, y = 3$ 일 때

주어진 식의 최댓값은 1이다.

22. 실수 x, y 가 방정식 $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값과 최솟값을 구하면 ?

① 최댓값 1, 최솟값 -3

② 최댓값 3, 최솟값 -1

③ 최댓값 3, 최솟값 1

④ 최댓값 -1, 최솟값 -3

⑤ 최댓값 4, 최솟값 -1

해설

x 에 관해 내림차순으로 정리하면

$$4x^2 - 16x + y^2 + 2y + 13 = 0$$

실수의 해를 가지므로

$$\frac{D}{4} = (-8)^2 - 4(y^2 + 2y + 13) \geq 0$$

$$\therefore y^2 + 2y - 3 \leq 0$$

$$\therefore (y + 3)(y - 1) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq y \leq 1$$

따라서, 최댓값은 1, 최솟값은 -3

23. 실수 x, y 가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$ 을 만족시킬 때, x 의 최댓값과 y 의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2} - 1$

② $2\sqrt{2} + 1$

③ $2\sqrt{2} + 2$

④ $\sqrt{2} + 4$

⑤ $\sqrt{2} + 5$

해설

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0 \text{ 을}$$

(i) x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0 \text{ 에서 } x \text{가 실수이므로}$$

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0, y^2 \leq 4$$

$$\therefore -2 \leq y \leq 2$$

따라서, y 의 최댓값은 2이다.

(ii) y 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0 \text{ 에서 } y \text{가 실수이므로}$$

$$\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0, x^2 \leq 8$$

$$\therefore -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$$

따라서, x 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$

24. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10

② 8

③ 6

④ 4

⑤ 2

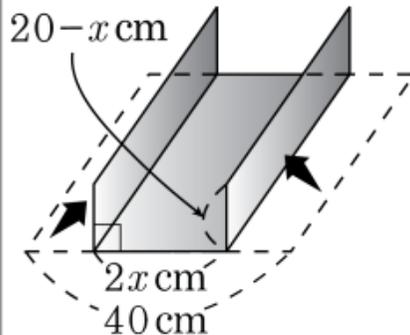
해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20 - x$ 이다.

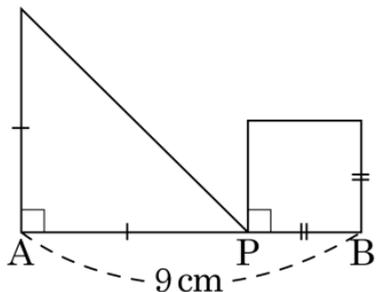
단면의 넓이는

$$2x(20-x) = -2x^2 + 40x = -2(x^2 - 20x + 200) + 100 = -2(x-10)^2 + 200$$

$\therefore x = 10$ 일 때 넓이가 최대이다.



25. 길이가 9cm인 선분 AB 위에 점 P를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP의 길이는?



- ① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
 ④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{AP} = 6(\text{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.