1. 등식 $ax^2-(2a+c)x-1=(b-2)x^2+(b+3)x-c$가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a, b, c를 정할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

(준식)$=(a-b+2)x^2-(2a+c+b+3)x-1+c=0$

이 식이 x에 대한 항등식이므로

$a-b+2=0,\ 2a+c+b+3=0,\ c=1$

$\Rightarrow a=-2,\ b=0,\ c=1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=5$

2. $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,

$(1+1)^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_5$ 이므로

$\therefore\ 2^5 = 32$

3. $x+y+(2x-y)i=2+7i$를 만족하는 두 실수 $x,\ y$에 대하여 xy의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $xy=-3$

해설

$x+y=2,\ 2x-y=7$

$\therefore\ x=3,\ y=-1$

$\therefore\ xy=-3$

4. $\dfrac{3+4i}{1+3i}$ 를 $a+bi$ 의 꼴로 나타 낼 때, $a-b$ 의 값은? (단, a , b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 2　　② -2　　③ 1　　④ -1　　⑤ 0

해설

분모의 실수화를 해준다.

$$\frac{3+4i}{1+3i}=\frac{(3+4i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$$

$\therefore a-b=2$

5. 실수 x, y 에 대하여 복소수 $z = x + yi$ 가 $z\bar{z} = 4$ 를 만족할 때, $x^2 + y^2$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$z = x + yi$ 에서 $\bar{z} = x - yi$ 이므로

$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$

주어진 조건에서 $z \cdot \bar{z} = 4$ 이므로

$x^2 + y^2 = 4$

6. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$ 를 계산하여라.

① $x^2 + 1$　② $x^2 - 1$　③ $x^2 + 2$

④ $x^2 - 2$　⑤ $x^2 + 3$

해설

$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$

$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

7. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{㉠}\ \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{㉡}\ \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{㉢}\ \frac{\sqrt{-16}}{2} \\
&= \boxed{㉣}\ \frac{4i}{2} \\
&= \boxed{㉤} = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\,\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\,\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

8. 방정식 $|x|+|x-1|=2$ 의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x<0$ 일 때,

$-x-(x-1)=2$ 이므로 $-2x+1=2$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

ii) $0\le x<1$ 일 때,

$x-(x-1)=2$ 이므로 $0\cdot x=1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $1\le x$ 일 때,

$x+x-1=2$ 이므로 $2x=3$

$\therefore\ x=\frac{3}{2}$

(i), (ii), (iii) 에서 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

9. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore \; m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$

$\therefore \; x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

10. 이차식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2-2(k-1)x+2k^2-6k+4=0$
이 중근을 갖는다.

따라서, $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(2k^2-6k+4)=0$

위의 식을 정리하면

$-k^2+4k-3=0$

$k^2-4k+3=0$

$(k-1)(k-3)=0$에서

$k=1$ 또는 $k=3$

11. 다음 세 개의 3차방정식의 공통근을 구하여라.

$$x^3+3x^2-x-3=0,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$
$$x^3-4x^2+5x-2=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

해설

제 1식에서 $(x-1)(x+1)(x+3)=0$

$\therefore\quad x=1,\ -1,\ -3$

제 2식에서 $(x-1)(x+1)(x+2)=0$

$\therefore\quad x=1,\ -1,\ -2$

제 3식에서 $(x-1)^2(x-2)=0$

$\therefore\ 1,\ 2$

$\therefore$공통근 : $x=1$

12. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(i) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ii) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

13. 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-y}{3} = \dfrac{z+3}{5} \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=3$

▷ 정답 : $y=-1$

▷ 정답 : $z=2$

해설

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2-y}{3}$ 에서

$3x+2y=7 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z+3}{5}$ 에서

$5x-2z=11 \quad \cdots\cdots ㉡$

$x+2y+3z=7 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠ − ㉢을 하면 $2x-3z=0 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉡ $\times 3 -$ ㉣ $\times 2$를 하면 $11x=33$

$\therefore\ x=3$ 이것을 ㉠, ㉡에 대입하면

$y=-1,\ z=2$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ 를 만족하는 $x,\ y,\ z$를 구할 때, $x^2+y^2+z^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{cases} x+y=1\cdots ㉠ \\ y+z=3\cdots ㉡ \\ z+x=4\cdots ㉢ \end{cases}$$

$㉠+㉡+㉢ \Rightarrow 2(x+y+z)=8$

$x+y+z=4\cdots ㉣$

$㉣-㉠ \Rightarrow z=3$

$㉣-㉡ \Rightarrow x=1$

$㉣-㉢ \Rightarrow y=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=10$

15. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

16. 다음 중 식의 전개가 바르지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$=(x^2-x-6)(x^2-x-2)$

$x^2-x=Y$라 놓자.

$$\begin{aligned}(Y-6)(Y-2)&=Y^2-8Y+12\\&=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

17. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$P=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$= \quad \vdots$

$=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$=2^{32}-1$

18. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 전개식에서
x^4항의 계수는 x^3의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$의 전개식에서 x^3의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

19. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

20. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$ $\therefore\ d = \sqrt{14}$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

21. 다음 중 $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x-1$　② $x+1$　③ $x-3$　④ $x+3$　⑤ $x+2$

해설

준식을 인수정리와 조립제법을 이용하여 정리하면
$(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)=0$
※ 최고차항의 계수가 1 인 다항식에서 인수정리를 사용할 때, 상수항의 약수 중에서 대입하여 0 이 되는 정수를 찾아본다.

22. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore \ N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$\quad = (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

23. $x=1001$ 일 때, $\dfrac{x^6-x^4+x^2-1}{x^5+x^4+x+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6-x^4+x^2-1}{x^5+x^4+x+1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)} \\ &= x-1 \\ &= 1001-1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

24. $a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$가 순허수가 되도록 실수 a의 값을 구하면?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$a^2(1+i)+a(2+i)-8-6i$

$=(a^2+2a-8)+i(a^2+a-6)$

$=(a+4)(a-2)+i(a+3)(a-2)$

만약에 $a=2$가 되면 실수가 된다.

$a \neq 2, \therefore\ a=-4$

25. x에 대한 일차방정식 $5x + a = 2x + 12$ 의 해가 자연수일 때, 자연수 a 의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 무수히 많다

해설

$5x - 2x = 12 - a, 3x = 12 - a$

$\therefore x = \dfrac{12 - a}{3}$

자연수 $a = 1, 2, 3, \cdots$ 을 대입했을 때,

$x = \dfrac{12 - a}{3}$ 가 자연수가 되는 경우는

$12 - a$ 가 3 의 배수이면서 $a < 12$ 일 때이다.

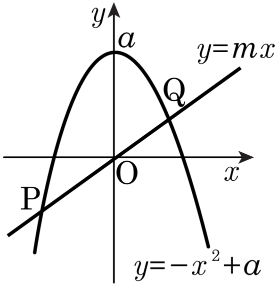
i) $a = 3$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 3}{3} = 3$

ii) $a = 6$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 6}{3} = 2$

iii) $a = 9$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 9}{3} = 1$

따라서 자연수 a의 개수는 3개이다.

26. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q 의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$$

$$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$$

$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

27. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 이 실근 $\alpha,\ \beta$ 를 가질 때, $|\alpha - \beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 에서

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -2a,\ \alpha\beta = -9 + 2a^2$

$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-2a)^2 - 4(-9 + 2a^2) = -4a^2 + 36$

그런데 $\dfrac{D}{4} = a^2 + 9 - 2a^2 \geq 0$

$\therefore\ -3 \leq a \leq 3$

$\therefore\ 0 \leq |\alpha - \beta|^2 \leq 36$

즉, $0 \leq |\alpha - \beta| \leq 6$

$\therefore$ (최댓값)$+$ (최솟값)$= 0 + 6 = 6$

28. x 에 대한 이차함수 $f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$ 의 최솟값을 $g(a)$ 라 할 때, $g(a)$ 의 최댓값은?

① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

해설

$f(x) = x^2 - 2x - a^2 + 4a + 3$

$= (x-1)^2 - a^2 + 4a + 2$

따라서, $f(x)$ 의 최솟값은 $g(a) = -a^2 + 4a + 2$

$g(a) = -(a-2)^2 + 6$ 에서

$g(a)$ 의 최댓값은 6 이다.

29. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$일 때, $2x^2+y^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $M-m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore \ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$일 때, $m=6$

$x=3$일 때, $M=18$

$\therefore \ M-m=12$

30. $x-1$로 나누면 나머지가 3, $x-2$로 나누면 나머지가 7, $x-3$으로 나누면 나머지가 13이 되는 가장 낮은 차수의 다항식을 $f(x)$라 할 때, $f(-3)$의 값은?

① 7 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+ax^2+bx+c$

$f(1)=a+b+c=3 \quad \cdots\cdots$ ①

$f(2)=4a+2b+c=7 \quad \cdots\cdots$ ②

$f(3)=9a+3b+c=13 \quad \cdots\cdots$ ③

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1,\ c=1$

$f(x)$가 가장 낮은 차수가 되려면 $k=0$

$\therefore f(x)=x^2+x+1,$

$f(-3)=(-3)^2+(-3)+1=7$

31. 두 다항식 A, B에 대하여 $\{A,\ B\} = A^2 + B^2 - AB$라 할 때, $\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7$을 실수 범위에서 인수분해한다. 이 때, 인수가 아닌 것은?

① $x - \sqrt{2}$　　② $x - 1$　　③ x

④ $x + 1$　　⑤ $x + \sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}
&\{x^2 + 1,\ 2x^2 - 3\} - 7 \\
&= (x^2 + 1)^2 + (2x^2 - 3)^2 - (x^2 + 1)(2x^2 - 3) - 7 \\
&= x^4 + 2x^2 + 1 + 4x^4 - 12x^2 + 9 - 2x^4 + x^2 + 3 - 7 \\
&= 3x^4 - 9x^2 + 6 \\
&= 3(x^4 - 3x^2 + 2) \\
&= 3(x^2 - 1)(x^2 - 2) \\
&= 3(x - 1)(x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})
\end{aligned}$$

32. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$　　② $-y$　　③ $2x$　　④ $\frac{-x}{2}$　　⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$

$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

33. 복소수 z가 $z+|z|=2+8i$를 만족시킬 때, $|z|^2$의 값은? (단, $z=a+bi$ (a,b는 실수)일 때, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$이다.)

① 68 ② 100 ③ 169 ④ 208 ⑤ 289

해설

$z=a+bi$라 놓자.

$z+|z|=2+8i$,

$a+bi+\sqrt{a^2+b^2}=2+8i$

$a+\sqrt{a^2+b^2}=2,\quad b=8$

$a+\sqrt{a^2+64}=2$

$\sqrt{a^2+64}=2-a$ 양변제곱하면,

$a^2+64=(2-a)^2=a^2-4a+4$

$4a=-60,\ a=-15$

$\therefore\ |z|^2=a^2+b^2=225+64=289$

34. $x^2 - 2kx + 1 = 0$의 해를 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 = 2$가 되도록 하는 k의 값들의 합을 구하면?

① 1　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 1$이므로

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2$에서

$(2k)^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2k = 2$

$4k^3 - 3k - 1 = 0,\ (k - 1)(4k^2 + 4k + 1) = 0,$

$(k - 1)(2k + 1)^2 = 0$

$\therefore\ k = 1,\ -\frac{1}{2}$

$\therefore\ k$값들의 합은 $\frac{1}{2}$

35. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$
② $-\alpha,\ -\beta$
③ $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$
④ $-\frac{1}{\alpha},\ -\frac{1}{\beta}$
⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha + \beta = \frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$cx^2 - bx + a = 0$에서

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{b}{c} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \left(\therefore \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \right)$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$의 양변을 $x^2 (\neq 0)$으로 나누면

$$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$$

이 때, $\frac{1}{x} = t$라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$

$\therefore\ cx^2 - bx + a = 0$의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$이다.

36. $y = x^2 + (m-1)x + m$, $y = x$ 를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 없도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $4 - 2\sqrt{2} \le m \le 4 + 2\sqrt{2}$

② $4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$

③ $2 - 2\sqrt{3} < m < 2 + 2\sqrt{3}$

④ $m \le 4 - 2\sqrt{2}$ 또는 $m \ge 4 + 2\sqrt{2}$

⑤ $m < 4 - 2\sqrt{3}$또는 $m > 4 + 2\sqrt{3}$

해설

두 함수 $y = x^2 + (m-1)x + m,\ y = x$의 그래프는 교점이 없어야 한다.

$x^2 + (m-1)x + m = x,$

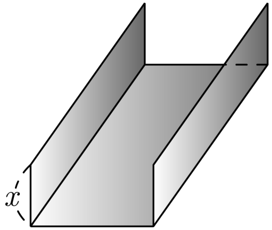
$x^2 + (m-2)x + m = 0$에서

$D = (m-2)^2 - 4m < 0$

$m^2 - 8m + 4 < 0$

$\therefore 4 - 2\sqrt{3} < m < 4 + 2\sqrt{3}$

37. 다음 그림과 같이 폭이 20 cm 인 양철판을 구부려서 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대일 때, x의 값은?



① 4 cm　② 5 cm　③ 6 cm　④ 7 cm　⑤ 8 cm

해설

단면의 세로의 길이를 x cm 라 하면
가로의 길이는 $(20-2x)$ cm
단면의 넓이를 S m^2 라 하면

$$\begin{aligned} S &= x(20-2x) = -2x^2 + 20x \\ &= -2(x-5)^2 + 50 \ (0 < x < 10) \end{aligned}$$

따라서 $x = 5$(cm) 일 때,
S 는 최댓값 50 m^2 를 갖는다.

38. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4+5x^3-12x^2+5x+1=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x=0$을 대입하면

$1=0$이 되어 모순이므로 $x\neq 0$이다.

따라서, 주어진 식의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2+5x-12+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-12=0$$

$$\therefore\ \left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-14=0$$

여기서 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-14=0,\ (X+7)(X-2)=0$

$\therefore\ X=-7$ 또는 $X=2$

(i) $X=-7$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-7$에서

$x^2+7x+1=0$

$\therefore\ \frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X=2$일 때,

$x+\frac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$

(i), (ii)로부터

$x=1$(중근) 또는 $x=\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$

따라서, 모든 근의 합은

$1+\frac{-7+3\sqrt{5}}{2}+\frac{-7-3\sqrt{5}}{2}=-6$이다.

39. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma,\ \beta + \gamma = 2 - \alpha,\ \gamma + \alpha = 2 - \beta$

주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore\ k = 4$

40. 다음 중에서 해가 무수히 많은 연립방정식을 모두 고르면?

① $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy + 2x = 3 \end{cases}$

② $\begin{cases} -2x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$

③ $\begin{cases} x + y - z = 5 \\ 2x - y + 2z = 8 \\ 7x + y + z = 31 \end{cases}$

④ $\begin{cases} x - y + 3z = 7 \\ 3x + 2y + 4z = 10 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} 2x - y + z = -3 \\ x + 3y - z = 4 \\ 5x + 2y + z = 0 \end{cases}$

해설

$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ 이 무수히 많은 해를 가진 조건은 $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ 이다.

삼변수 연립방정식의 경우 2개로 줄인 후 위 조건에 맞는지 판단한다.

② $\begin{cases} -2x + y = 1 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 조건에 해당

③ $\begin{cases} 8x + 2y = 36 \\ 4x + y = 18 \end{cases}$ $\Rightarrow$ 조건에 해당