

1. 두 다항식 A, B 에 대하여 연산 $A \ominus B$ 와 $A \otimes B$ 을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$$A \ominus B = A - 3B, A \otimes B = (A + B)B$$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3$, $Q = x^3 + x^2y + xy^2$ 이라 할 때,
 $(P \ominus Q) \otimes Q$ 를 x, y 에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$

② $x^4y^2 - xy^5$

③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$

⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$ 를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$P - 2Q$$

$$\begin{aligned}&= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

2. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$

② $4x^2 - 7x + 3$

③ $4x^2 - 4x + 5$

④ $4x^2 - 8x + 2$

⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.

몫: $4x^2 - x - 2$, 나머지: $-5x + 3$

$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

3. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x - y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x - 2y$

② $(a + b)^2(a - b)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

③ $(-x + 3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

④ $(a - b)(a^2 + ab - b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(p - 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1) = p^{16} - 1$

해설

① $(x - y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2x + 2y$

③ $(-x + 3)^3 = -x^3 + 9x^2 - 27x + 27$

④ $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1) = p^8 - 1$

4. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$$

이것은 k 에 대한 항등식이므로

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

연립방정식을 풀면 $x = 2, y = -3$

$$\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$$

5. 다항식 $2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 이 $x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 a, b 의 값은?

① $a = -2, b = -8$

② $a = 3, b = 4$

③ $a = -1, b = -3$

④ $a = 4, b = -2$

⑤ $a = -3, b = 7$

해설

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 로 놓으면

$x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1) = 0, f(2) = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(1) = 2 + a + b + 8 = 0,$$

$$f(2) = 16 + 4a + 2b + 8 = 0$$

$$\therefore a + b = -10, 2a + b = -12$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, b = -8$

6. $x^3 + ax^2 + bx - 4$ 는 $x - 2$ 로 나누어 떨어지고 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 6이다. $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ 라 하면

$$f(2) = 4a + 2b + 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(-1) = a - b - 5 = 6 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서 $a = 3$, $b = -8$

$$\therefore a - b = 11$$

7. $x^2 - 2x - y^2 + 2y$ 를 인수분해하였더니, $(x + ay)(x - by + c)$ 가 되었다.
이 때, a, b, c 를 순서대로 쓴 것은?

① $-1, 0, 1$

② $-1, 1, 2$

③ $-2, -1, 1$

④ $-1, -1, -2$

⑤ $-1, 2$

해설

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - y^2 + 2y &= (x + y)(x - y) - 2(x - y) \\ &= (x - y)(x + y - 2)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -1, b = -1, c = -2$$

8. 다항식 $(x-1)^3 + 27$ 을 바르게 인수분해한 것은?

① $(x-1)(x^2+3)$

② $(x-1)(x^2-x-2)$

③ $(x-1)(x^2+3x+3)$

④ $(x+2)(x^2+x+7)$

⑤ $(x+2)(x^2-5x+13)$

해설

$x-1$ 을 A 로 치환하면

$$\text{준 식} = A^3 + 27 = (A+3)(A^2-3A+9)$$

다시 $x-1$ 을 대입하면 $(x+2)(x^2-5x+13)$

9. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ 을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$

② $(x-1)(x+2)(x+3)$

③ $(x-1)(x-2)(x-3)$

④ $(x+1)(x+2)(x-3)$

⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면

$$f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

10. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9개

② 12개

③ 16개

④ 24개

⑤ 32개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$$\therefore (3+1)(3+1) = 16$$

11. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2$, $B = 3x^2 - 2x + 1$, $C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$ 를 간단히 하면?

① $3x^2 + 12x - 13$

② $-3x^2 + 24x + 21$

③ $3x^2 - 12x + 21$

④ $-3x^2 - 24x + 21$

⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$$

$$= -2A + 5B - 4C$$

$$= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3)$$

$$= -3x^2 - 24x + 21$$

12. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$ 를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x + (x+3)\times 2 \\ &= (x^2 + 3x) + (2x + 6) \\ &= x^2 + (3x + 2x) + 6 \\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

- ① 교환법칙, 결합법칙
- ② 교환법칙, 분배법칙
- ③ 분배법칙, 결합법칙
- ④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙
- ⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x + (x+3)\times 2 \quad (\text{분배}) \\ &= (x^2 + 3x) + (2x + 6) \quad (\text{분배}) \\ &= x^2 + (3x + 2x) + 6 \quad (\text{결합}) \\ &= x^2 + 5x + 6\end{aligned}$$

13. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, $xf(x) - 3$ 을 $x+1$ 로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R - 3$

② $xQ(x), -R + 3$

③ $xQ(x), -R - 6$

④ $xQ(x) + R, -R - 3$

⑤ $xQ(x) + R, -R + 3$

해설

$$f(x) = (x+1)Q(x) + R$$

$$\therefore xf(x) = x(x+1)Q(x) + xR$$

$$\therefore xf(x) - 3 = x(x+1)Q(x) + xR - 3$$

$$= (x+1)\{xQ(x)\} + (x+1)R - R - 3$$

$$= (x+1)\{xQ(x) + R\} - R - 3$$

14. 사차식 $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7$ 을 이차식 A 로 나누었더니 몫이 $x^2 - 2$ 이고 나머지가 $4x - 5$ 일 때, 이차식 A 를 구하면?

① $3x^2 - 2$

② $3x^2 - 1$

③ $3x^2$

④ $3x^2 + 1$

⑤ $3x^2 + 2$

해설

$$\text{검산식} : 3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$$

$$A = \frac{3x^4 - 5x^2 - 2}{x^2 - 2} = 3x^2 + 1$$

15. 다항식 $f(x)$ 를 $x + \frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x + 1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R

② $3Q(x)$, $3R$

③ $3Q(x)$, R

④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R

⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x) = Q(x) \left(x + \frac{1}{3} \right) + R = \frac{1}{3}Q(x)(3x + 1) + R$$

16. $(-2x^3 + x^2 + ax + b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a - 2b$ 의 값은?

① -6

② -4

③ -2

④ 0

⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$$(-2x^3 \times b) \times 2 + (x^2 \times ax) \times 2 = (-4b + 2a)x^3$$

$$2a - 4b = -8$$

$$\therefore a - 2b = -4$$

17. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 29

해설

준 식은 $(a - b)^3$ 이다.

$$a - b = 2004 - 2001 = 3$$

$$\therefore (a - b)^3 = 3^3 = 27$$

18. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $abc = -1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

①

11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$ab + bc + ca = -1$$

$$a^3 + b^3 + c^3$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$$

$$= 2 \times (6 - (-1)) - 3 = 11$$

19. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$

④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

$$\begin{aligned}\text{대각선 : } d^2 &= x^2 + y^2 + z^2 & \therefore d &= \sqrt{14} \\ &= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\ &= 6^2 - 22 = 14\end{aligned}$$

20. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $(a, b, c) = ab + bc$ 로 정의한다. 이때, 등식 $(x, a, y) - (2x, b, y) = (x, 2, y)$ 이 임의의 실수 x, y 에 대하여 성립하도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = 1, b = 2$

② $a = 2, b = 2$

③ $a = 2, b = 0$

④ $a = 0, b = 2$

⑤ $a = 0, b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$$

이 식을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$$

이 등식이 임의의 x, y 에 대하여 성립하므로

$$a - 2b - 2 = 0, a - b - 2 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

21. x 에 대한 다항식 $x^3 + kx^2 + kx - 1$ 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_1(x)$, R_1 , $x + 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 $Q_2(x)$, R_2 라 할 때, $R_1 = R_2$ 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하면?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^3 + kx^2 + kx - 1 &= (x - 2)Q_1(x) + R_1 \\ &= (x + 2)Q_2(x) + R_2\end{aligned}$$

$$x = 2 \text{ 대입, } R_1 = 8 + 4k + 2k - 1 = 6k + 7$$

$$x = -2 \text{ 대입, } R_2 = -8 + 4k - 2k - 1 = 2k - 9$$

$$R_1 = R_2 \text{ 이므로 } 6k + 7 = 2k - 9$$

$$\therefore k = -4$$

22. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. 다음 중 옳지 않은 것은?

k	1	a	b	1
		c	d	1
	1	3	-1	2

- ① $a = 3$ ② $b = 2$ ③ $c = -1$
 ④ $d = -3$ ⑤ $k = -1$

해설

다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 1$ 를 $x + 1$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

-1	1	a	b	1
		-1	$-a + 1$	$-b + a - 1$
	1	$a - 1$	$b - a + 1$	$-b + a$

이때 $k = -1$, $c = -1$, $d = -a + 1$, $b - a + 1 = -1$, $-b + a = 2$
 이므로

$k = -1$, $c = -1$, $a = 4$, $b = 2$, $d = -3$

따라서 옳지 않은 것은 ①이다.

23. $(x^2 + x)(x^2 + x - 8) + 12$ 를 인수분해 할 때, 다음 중 인수가 될 수 없는 것은?

① $x - 1$

② $x + 1$

③ $x - 2$

④ $x + 2$

⑤ $x + 3$

해설

$x^2 + x = A$ 로 놓으면 주어진 식은

$$A(A - 8) + 12 = A^2 - 8A + 12$$

$$= (A - 2)(A - 6)$$

$$\therefore (\text{준식}) = (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 6)$$

$$= (x - 1)(x + 2)(x - 2)(x + 3)$$

24. 다항식 $2x^2 - 2y^2 + 3xy + 5x + 5y + 3$ 을 두 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 두 일차식의 합으로 옳은 것은?

① $3x + 3y - 2$

② $3x - y - 4$

③ $3x + y + 4$

④ $3x + y - 2$

⑤ $3x - y + 2$

해설

$$2x^2 + (3y + 5)x - (2y^2 - 5y - 3)$$

$$= \{2x + (2y + 1)\} \{x - (y - 3)\}$$

$$\therefore (2x + 2y + 1) + (x - y + 3) = 3x + y + 4$$

25. 다음 중 다항식 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a - b$

② $b - c$

③ $c - a$

④ $a + b + c$

⑤ $a - b + c$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2) \\&= (b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\} \\&= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2 - ca) - a(c^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b^2 + bc - ac - a^2) \\&= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

26. 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 를 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$(x + y + z) = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\therefore x + y + z = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수($x \neq y \neq z$)이므로

$$x + y + z = 0$$

27. $\frac{1999^3 + 1}{1999 \cdot 1998 + 1}$ 의 값은?

① 1997

② 1998

③ 1999

④ 2000

⑤ 2001

해설

1999 = x 라 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{x^3 + 1}{x(x-1) + 1} = \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} \\ &= x + 1 = 1999 + 1 = 2000\end{aligned}$$

28. $a = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$ 이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a 의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$ 이다. 이 때, $k+l+m$ 의 값을 구하면?

① 2046

② 2047

③ 2048

④ 2049

⑤ 2050

해설

$$a = (3+1)(3^2+1)\cdots(3^{1024}+1)$$

양변에 $(3-1)$ 을 곱하면

$$(3-1)a = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1)$$

$$\begin{aligned} 2a &= (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\ &= (3^4-1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\ &= (3^8-1)\cdots(3^{1024}+1) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$= (3^{2048}-1)$$

양변을 2로 나누면

$$a = \frac{1}{2}(3^{2048}-1)$$

$$\therefore k=2, l=2048, m=-1$$

$$\therefore k+l+m=2049$$

29. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형

② 이등변삼각형

③ 정삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 둔각삼각형

해설

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \text{ 에서 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0 \text{ 이고,}$$

a, b, c 는 실수이므로, $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

30. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 20m이고 대각선의 길이가 3m일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m^2 인가?

① 12m^2

② 13m^2

③ 14m^2

④ 15m^2

⑤ 16m^2

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$4(a + b + c) = 20, a + b + c = 5$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$(\text{겉넓이}) = 2(ab + bc + ca)$$

$$= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 25 - 9 = 16(\text{m}^2)$$

31. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^{101} + \frac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

① 1

② -1

③ -2

④ 2

⑤ 101

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 에서 } x^2 + 1 = x$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0, x^3 = -1$$

$$(\text{준 식}) = (x^3)^{33} \cdot x^2 + \frac{1}{(x^3)^{33} \cdot x^2}$$

$$= -x^2 + \frac{-1}{x^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2} = -\frac{-x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{x - 1}{x^2} = 1$$

32. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$ 가 x 에 대한 항등식이 되도록 실수 $a + b + c + p$ 의 값을 구하면?

① -1

② 1

③ -2

④ 2

⑤ 0

해설

양변에 $x = p$ 를 대입하면

$$p^3 - p^2 + 2 = 0$$

$$(p+1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore p = -1$$

따라서 주어진 식은

$$x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$$

양변에 $x = 0$ 을 대입하면 $2 = a + b + c$

$$\therefore a + b + c + p = 1$$

해설

$$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$$

$$= (x-p) \{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$$

$$\therefore (x+1)(x^2 - 2x + 2)$$

$$= (x-p) \{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\}$$

양변을 비교하면, $x+1 = x-p$,

$$x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$$

$$\therefore p = -1$$

$$\text{또 } x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$$

$$= ax^2 + (2a+b)x + a+b+c$$

$$\therefore a = 1, 2a+b = -2, a+b+c = 2$$

$$\therefore b = -4, c = 5$$

따라서 $a = 1, b = -4, c = 5, p = -1$

$$\therefore a + b + c + p = 1$$

33. x 에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면,

$$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{㉠}$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면,

$$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} : -2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = -1$$

34. 다항식 $f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 가 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때,
 $f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는?

① 0

② a_0

③ a_1

④ a_5

⑤ $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

해설

나머지 정리에 의해 $f(\alpha) = 0$

$\therefore f(f(x))$ 를 $x - \alpha$ 로 나눈 나머지는 $f(f(\alpha))$

$f(f(\alpha)) = f(0) = a_0$

35. x 에 대한 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + 8$ 은 $(x + 2)^2$ 으로 나누어 떨어지고, $1 - f(x)$ 는 $x^2 - 1$ 로 나누어 떨어질 때, $f(x)$ 의 상수항은?

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$f(x) + 8 = (x + 2)^2(ax + b) \cdots \textcircled{㉠}$$

$$1 - f(x) = (x^2 - 1)Q(x) \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡}\text{에서 } f(1) = 1, f(-1) = 1$$

그러므로 $\textcircled{㉠}$ 에서

$$1 + 8 = 9(a + b) \cdots \textcircled{㉢}$$

$$1 + 8 = -a + b \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉣}\text{에서 } a = -4, b = 5$$

$$\therefore f(x) = (x + 2)^2(-4x + 5) - 8$$

$$\therefore \text{상수항은 } f(0) = 2^2 \cdot 5 - 8 = 12$$

36. 다항식 $f(x)$ 를 $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ 로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$ 를 $3x - 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x), R$

② $3Q(x), R$

③ $Q(x), 3R$

④ $\frac{1}{3}Q(x), R$

⑤ $Q(x), \frac{1}{3}R$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{2}{3}\right) Q(x) + R \\ &= 3 \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} Q(x) + R \\ &= (3x - 2) \frac{1}{3} Q(x) + R \end{aligned}$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫: $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지: R

37. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\} \\ &= (x-y)(x+y+1)^2 \\ & p = -1, q = 1, r = 1 \\ & \therefore p^2 + q^2 + r^2 = 3 \end{aligned}$$

38. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① 2

② $2(a+b)^n$

③ 4

④ $4(a+b)^n$

⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로

합차공식을 사용하여 정리하면

$$(\text{준식}) = 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2 - b^2)^n = 4$$

39. 다음 중 다항식 $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a - b$

② $b - c$

③ $c - a$

④ $a + b + c$

⑤ $a - b + c$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= a^3(b-c) - a(b^3 - c^3) + bc(b^2 - c^2) \\&= (b-c)\{a^3 - a(b^2 + bc + c^2) + bc(b+c)\} \\&= (b-c)\{b^2(c-a) + b(c^2 - ca) - a(c^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b^2 + bc - ac - a^2) \\&= (b-c)(c-a)\{c(b-a) + (b^2 - a^2)\} \\&= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)\end{aligned}$$

40. $a(a+1) = 1$ 일 때, $\frac{a^6 - 1}{a^4 - a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6 - 1}{a^4 - a^2} &= \frac{(a^3 + 1)(a^3 - 1)}{a^2(a^2 - 1)} \\&= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)}{a^2(a + 1)(a - 1)} \\&= \frac{(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)}{a^2} \leftarrow a^2 = 1 - a \text{ 대입} \\&= \frac{2(1 - a) \times 2}{1 - a} = 4\end{aligned}$$

41. x 의 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x^2) = x^3 f(x+1) - 2x^4 + 2x^2$ 이 성립할 때, $f(x)$ 를 구하면? (단, $f(0) = f(1) = f(2) = 0$)

- ① $f(x) = x(x-1)(x-2)$ ② $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$
 ③ $f(x) = x(x-1)^2(x-2)$ ④ $f(x) = x(x-1)(x-2)^2$
 ⑤ $f(x) = x^2(x-1)^2(x-2)$

해설

(i) $f(x)$ 를 n 차의 식이라하면

좌변 : $2n$ 차 = 우변 : $n+3$ 차

$$\therefore n = 3$$

(ii) $f(x) = kx(x-1)(x-2)$ (단, $k \neq 0$)

$$(\because f(0) = f(1) = f(2) = 0)$$

$$\text{좌변} = kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2$$

$$\text{우변} = kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$$

$$\therefore kx^6 - 3kx^4 + 2kx^2 = kx^6 - (k+2)x^4 + 2x^2$$

$$-3k = -(k+2)$$

$$k = 2 \text{에서 } k = 1$$

$$\therefore f(x) = x(x-1)(x-2)$$

42. x 에 관한 항등식 $x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$ 가 성립할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 1

② -1

③ 2

④ -2

⑤ 5

해설

$$x^n(x^2 + ax + b) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식에 $x = 2$ 를 대입하면, $2^n(4 + 2a + b) = 0$

$$\therefore b = -2a - 4 (2^n \neq 0) \cdots \textcircled{1}$$

①을 준식에 대입하면,

$$x^n(x^2 + ax - 2a - 4) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

$$x^n(x-2)(x+a+2) = (x-2)^2p(x) + 2^n(x-2)$$

위의 식이 항등식이므로 다음 식도 항등식이다.

$$x^n(x+a+2) = (x-2)p(x) + 2^n$$

다시 $x = 2$ 를 대입하면,

$$2^n(4+a) = 2^n \quad \therefore a = -3$$

$a = -3$ 을 ①에 대입하면,

$$b = (-2)(-3) - 4 = 2$$

$$\therefore a = -3, b = 2$$

$$\therefore a + b = -1$$

43. 다음과 같은 삼차다항식 $P(x)$, $Q(x)$ 가 있다.

$$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1999, Q(x) = -x^3 + cx^2 + dx - 1999$$

두 삼차다항식을 $x^2 - 1$ 로 나누면 나머지가 서로 같다고 한다. 이때, $P(1999) - Q(1999)$ 의 값은?

① -3998

② -1999

③ 0

④ 1999

⑤ 3998

해설

$H(x) = P(x) - Q(x)$ 로 놓으면

$H(x)$ 는 $x^2 - 1$ 로 나누어떨어지므로

$$H(x) = 2x^3 + (a - c)x^2 + (b - d)x + 3998$$

$= (x^2 - 1)(2x - 3998)$ 으로 놓을 수 있다.

($\because x^3$ 의 계수가 2이고 상수항이 3998이므로 $x^2 - 1$ 로 나눈 몫은 $2x - 3998$ 이다.)

$$\therefore P(1999) - Q(1999)$$

$$= H(1999)$$

$$= (1999^2 - 1)(3998 - 3998)$$

$$= 0$$

44. 10차 다항식 $P(x)$ 가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$ (단, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$)을 만족시킬 때, $P(11)$ 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{5}{6}$

⑤ 1

해설

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$$

$$f(x) = (x+1)P(x) - x \text{라 하면}$$

$$f(x) \text{ 는 } f(0) = f(1) = f(2) = \dots$$

$$= f(10) = 0 \text{인 다항식이다.}$$

$$\therefore f(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$$

$$\text{또, } f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\cdots(-11)$$

$$= -a \cdot 11! \text{ (단, } 11! = 1 \times 2 \times \cdots \times 11)$$

$$\therefore a = -\frac{1}{11!}$$

$$f(11) = 12P(11) - 11$$

$$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdots 1 = -1$$

$$\therefore P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

45. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $x - 3$ 으로 나눌 때의 나머지는 5이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 3)$ 으로 나눌 때의 나머지를 구하면?

① $\frac{1}{2}(x^2 + 1)$

② $\frac{1}{3}(x^2 + 1)$

③ $\frac{1}{5}(x^2 + 1)$

④ $2x^2 - 3x + 1$

⑤ $\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{1}{2}$

해설

$$f(x) = (x^2 + 1)Q_1(x)$$

$$f(x) = (x - 3)Q_2(x) + 5$$

$$\therefore f(3) = 5$$

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 3)Q_3(x) + ax^2 + bx + c$$

$$= (x^2 + 1)(x - 3)Q_3(x) + a(x^2 + 1)$$

($\because f(x)$ 는 $x^2 + 1$ 로 나누어 떨어지므로)

$$= (x^2 + 1)\{(x - 3)Q_3(x) + a\}$$

$$x = 3 \text{을 대입하면 } f(3) = 10a = 5$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} \text{이고 나머지는 } \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

46. x^3 의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ 이 성립한다. 이 때, $f(x)$ 를 $x - 4$ 로 나눈 나머지는?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3 \text{ 에서 } f(x) = x$$

즉, $f(x) - x$ 는 $x - 1, x - 2, x - 3$ 을 인수로 한다.

$$f(x) - x = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + x, f(4) = 10$$

해설

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ 라 하면}$$

$$(i) f(1) = 1 \Rightarrow a + b + c + 1 = 1$$

$$(ii) f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c + 8 = 2$$

$$(iii) f(3) = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c + 27 = 3$$

위의 세식을 연립하여 풀면,

$$a = -6, b = 12, c = -6$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$$

$$\therefore f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 12 \times 4 - 6 = 10$$

47. $(a+b)(b+c)(c+a) + abc$ 를 인수분해 하면?

① $(a+b)(ab+bc+ca)$

② $(b+c)(ab+bc+ca)$

③ $(a+b)(a+b+c)$

④ $(a+b+c)(ab+bc+ca)$

⑤ $(b+c)(a+b+c)$

해설

$a+b+c = k$ 라 하면

$$(\text{준식}) = (k-a)(k-b)(k-c) + abc$$

$$= k^3 - (a+b+c)k^2 + (ab+bc+ca)k - abc + abc$$

$$= k \{ k^2 - (a+b+c)k + (ab+bc+ca) \}$$

$$= (a+b+c)(ab+bc+ca) \quad (\because a+b+c = k)$$

48. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

㉤ $a = b$ 인 이등변삼각형

㉥ $b = c$ 인 이등변삼각형

① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형

④ $a = b$ 인 이등변삼각형

⑤ $b = c$ 인 이등변삼각형

해설

$$\frac{a-b+c}{a+b+c} = \frac{-a-b+c}{a-b-c} \text{ 에서}$$

$$(a-b+c)(a-b-c) = (a+b+c)(-a-b+c)$$

$$(a-b+c)(a-b-c) + (a+b+c)(a+b-c) = 0$$

$$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\} + \{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\} = 0$$

$$(a-b)^2 - c^2 + (a+b)^2 - c^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2 - 2c^2$$

$$= 2(a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$\therefore a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

49. $10^{20} - 4$ 과 $10^{30} - 8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리

② 11자리

③ 12자리

④ 13자리

⑤ 14자리

해설

$$\begin{aligned}10^{20} - 4 &= (10^{10})^2 - 2^2 \\ &= (10^{10} - 2)(10^{10} + 2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}10^{30} - 8 &= (10^{10})^3 - 2^3 \\ &= (10^{10} - 2)(10^{20} + 10^{10} \times 2 + 4)\end{aligned}$$

$$\therefore \text{최대 공약수는 } 2(10^{10} - 2) = 2 \cdot 10^{10} - 4$$

$\therefore$ 11자리수

50. $a - b = 2 - \sqrt{3}$, $b - c = 2 + \sqrt{3}$ 인 세 수 a , b , c 에 대하여 $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ 의 값은?

① 4

② 3

③ 1

④ -2

⑤ -3

해설

$$a - b = 2 - \sqrt{3} \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$b - c = 2 + \sqrt{3} \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 계산하면 $a - c = 4$

$$a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$$

$$= a^2(b - c) + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$$

$$= a^2(b - c) - a(b^2 - c^2) + b^2c - c^2b$$

$$= a^2(b - c) - a(b + c)(b - c) + bc(b - c)$$

$$= (b - c)\{a^2 - a(b + c) + bc\}$$

$$= (b - c)(a - b)(a - c)$$

$$= (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) \cdot 4 = 4$$