1. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$
$D=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot (m+4)=m^2-2m-15=0$
$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore\ m=-3,\ 5$
$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

2. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$ 이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　　② -4　　③ -2　　④ 5　　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1 - k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$ 이어야 하므로

$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\frac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4 이다.

3. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a = 1, b = 2$　② $a = 0, b = 3$　③ $a = -1, b = 2$

④ $a = 0, b = 2$　⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$

$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a = 0, \ a^2 - b + 3 = 0$

$\therefore \quad a = 0, b = 3$

4. $x^2 + ax + b = 0$ (a, b 는 실수) 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

한 근이 $1 + i$ 이므로,
켤레근 $1 - i$ 도 식의 근.
$(1 + i) + (1 - i) = -a$
$\therefore\ a = -2$

5. x 에 대한 두 이차방정식
$x^2 - 2\sqrt{b}x + (2a+1) = 0 \cdots$ ㉠
$x^2 - 2ax - b = 0 \cdots$ ㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

① 서로 다른 두 실근을 가진다.

② 중근을 가진다.

③ 서로 다른 두 허근을 가진다.

④ 판별할 수 없다.

⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = b - (2a+1) > 0 \therefore\ b > 2a+1$
㉡의 판별식을 D' 이라 하면
$\frac{D'}{4} = a^2 + b > a^2 + 2a + 1$
$= (a+1)^2 \geq 0$
$\therefore\ \frac{D'}{4} > 0$
따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

6. 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$
㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서
$D = b^2 - 4a > 0$
㉡ $x^2 - ax - b = 0$에서
$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.
㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서
$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

7. x에 대한 이차식 $a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$이 완전제곱식일 때, a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① a를 빗변으로 하는 직각삼각형

② b를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ c를 빗변으로 하는 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a\left(1-x^2\right)-2bx+c(1+x^2)$을 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(c-a)x^2-2bx+a+c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
$c-a\neq 0$이고, $\frac{D}{4}=0$이어야 한다.
$\frac{D}{4}=b^2-(c-a)(c+a)=0$
$b^2-(c^2-a^2)=0, \quad b^2-c^2+a^2=0$
$\therefore c^2=b^2+a^2$
따라서 c를 빗변으로 하는 직각삼각형이다.

8. 이차방정식 $ix^2+(2+i)x-i(1+i)=0$의 두 근의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-1-2i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1+2i$ ⑤ $3i$

해설

주어진 양 방정식에 i 를 곱하면

$-x^2+(2i-1)x-i(i-1)=0$

$x^2-(2i-1)x+i(i-1)=0$

$(x-i)(x+1-i)=0$

$\therefore x=i$ 또는 $x=-1+i$

두 근의 합은 $-1+2i$

9. 복소수의 범위에서 인수분해가 옳게 된 것은?

① $x^4 + x^2 - 2 = (x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1)$

③ $x^2 - 2x - 1 = (x-1-\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$

④ $x^2 + 2x + 3 = (x+1-2i)(x+1+2i)$

⑤ $x^4 - 4 = (x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$

해설

① $(x^2+2)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x^2+2)$
$= (x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i) \rightarrow$ (○)
② $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$
③ $x^2 - 2x - 1 = (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$
④ $x^2 + 2x + 3 = (x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$
⑤ $x^4 - 4$
$= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$

10. x에 대한 실수 계수의 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$로 잘못 기억하고 풀어 두 근이 -1, 2를 얻었다. 이 방정식을 바르게 풀 때, 두 근의 합은?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

잘못 기억한 근의 공식에서

두 근을 합하면 $-\frac{2b}{a}$이므로

$-\frac{2b}{a}=-1+2=1$이다.

따라서 준 식은 $-2bx^2+bx+c=0$이 되고

따라서 (두근의 합)$=-(-\frac{b}{2b})=\frac{1}{2}$

11. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 1　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면
근의 공식에 의하여
$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$
$\quad = -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4}$ $\cdots\cdots$ ㉠
한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면
$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고
준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로
x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.
따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.
$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$
$2 + k = 0$
$\therefore\ k = -2$

12. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha|=\dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1}=|2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$

$q=\dfrac{1}{4}p^2+2p+5=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2)=4$

q에 대해 정리하면

$q=\dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

13. 이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 두 수 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2-bx+4=0$이다. 이 때, 실수 $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2-2x+a=0$의 두 근을 α, β라 하면
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=a$
한편, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 방정식은
$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=a+2$
$(\alpha+\beta)\cdot(\alpha\beta)=2a$에서
$x^2-(a+2)x+2a=0$ ······㉠
㉠이 $x^2-bx+4=0$과 같으므로
$a+2=b$, $2a=4$에서 $a=2$, $b=4$
$\therefore\ a+b=2+4=6$

14. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α, β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p, q로 나타내면?

① $(p+q)^2$ ② $(2p+q)^2$ ③ $(p-2q)^2$
④ $(p-q)^2$ ⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로
주어진 식 $=\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\}$
$=\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\}\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\}$
$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$
그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서
$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$
또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서
$\delta^2+n\delta+p=p-q$
따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$

15. 사차방정식 $x^4+(2k+1)x^2+k^2-5=0$이 서로 다른 두 개의 실근과 서로 다른 두 개의 허근을 갖도록 실수 k의 값을 정할 때, k의 최대 정수값 M과 k의 최소 정수값 m의 곱 $M \cdot m$을 구하면?

① -4　② 2　③ -2　④ -6　⑤ 1

해설

$x^2=t$로 놓으면 주어진 사차방정식은
$t^2+(2k+1)t+k^2-5=0 \cdots$ ①
사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면
방정식 ①이 서로 다른 부호의 실근을 가져야 하므로
두 근의 곱 : $k^2-5<0$
$\therefore\ -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}\ \ (\sqrt{5} \fallingdotseq 2.236\cdots)$
$\therefore\ M=2,\ m=-2$
$\therefore\ M \cdot m=-4$