1. $-1 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$
이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \le x \le 1$ 에 속하지 않으므로
$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.
따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$
$\therefore a = -2$

2. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $|\alpha - \beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + 2ax - 9 + 2a^2 = 0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -2a,\ \alpha\beta = -9 + 2a^2$
$|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-2a)^2 - 4(-9 + 2a^2) = -4a^2 + 36$
그런데 $\frac{D}{4} = a^2 + 9 - 2a^2 \geq 0$
$\therefore\ -3 \leq a \leq 3$
$\therefore\ 0 \leq |\alpha - \beta|^2 \leq 36$
즉, $0 \leq |\alpha - \beta| \leq 6$
$\therefore$ (최댓값)+ (최솟값)$= 0 + 6 = 6$

3. x 의 값의 범위가 $x \geq 3$ 인 이차함수 $y = 2x^2 - 8kx$ 의 최솟값이 10 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$y = 2x^2 - 8kx = 2(x - 2k)^2 - 8k^2$ 이
이참함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(2k,\ -8k^2)$ 이다.

(i) $2k \geq 3$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가 x 의 값의 범위에 속하므로 주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $-8k^2 = 10,\ k^2 = -\frac{5}{4}$ 이 때, 실수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2k < 3$ 일 때 꼭짓점의 x 좌표가 x 의 값의 범위에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $18 - 24k = 10,\ 24k = 8$

$\therefore k = \frac{1}{3}$

4. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 3\}$ 인 이차함수 $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 의 최솟값이 -1 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(1, b)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1,\ b = -2$
② $a = 1,\ b = 2$
③ $a = -1,\ b = 2$
④ $a = 1,\ b = -2$
⑤ $a = -2,\ b = 2$

해설

$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$
$= a(x-2)^2 + 3\ (0 \le x \le 3)$ 이므로
$x = 0$ 일 때 최솟값은 -1 을 갖는다.
$-1 = 4a + 3$
$\therefore a = -1$
점 $(1,\ b)$ 를 지나므로
$\therefore b = a + 3 = 2$

5. $0 \le x \le 3$ 에서 함수 $f(x) = x^2 - ax$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 최댓값은? (단, $0 \le a \le 2$)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$f(x) = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ $(0 \le x \le 3)$

$0 \le \frac{a}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 $m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4}$,

최댓값 $M = f(3) = 9 - 3a$

$\therefore M + m = 9 - 3a - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{4}(a+6)^2 + 18$

이때, $0 \le a \le 2$ 이므로

$M + m$ 은 $a = 0$ 일 때 최댓값 9 를 갖는다.

6. $f(x) = x^2 - x + 1$ 일 때, $0 \le x \le 1$ 에서 $f(4 - f(x))$ 의 최솟값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$f(4 - f(x))$ 에서 $4 - f(x) = t$ 라 두면,

$t = -x^2 + x + 3$

$= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4}$ $(0 \le x \le 1)$ 에서

$3 \le t \le \frac{13}{4}$

따라서

$$\begin{aligned} f(4 - f(x)) &= f(t) = t^2 - t + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(3 \le t \le \frac{13}{4}\right) \end{aligned}$$

$t = 3$ 일 때, 최솟값 7을 갖는다.

7. $x^2+2y^2=4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $4x+2y^2$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x^2+2y^2=4$에서 $2y^2=4-x^2$
이때, y는 실수이므로 $2y^2=4-x^2\ge 0$
$\therefore -2\le x\le 2$
$4x+2y^2=4x+4-x^2=-(x-2)^2+8$
$(-2\le x\le 2)$
따라서 $x=-2$일 때, 최솟값 $m=-8$이고,
$x=2$일 때, 최댓값 $M=8$이므로 $M+m=0$

8. 두 실수 x, y가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$에서 x가 실수이므로

$\frac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$

$(y + 3)(y - 2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$

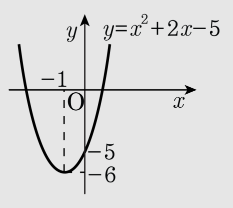
따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

9. $-2 \le x \le 1$ 일 때, 함수 $y = |x^2+2x-5|$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

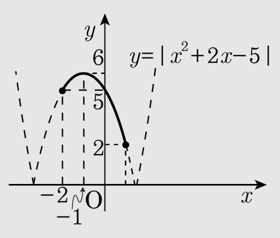
① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$y = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6$ 이므로
$y = x^2 + 2x - 5$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.



이 때, $y = |x^2 + 2x - 5|$ 의 그래프는 아래 그래프에서 x 축 윗부분은 그대로 두고, x 축 아랫부분을 x 축에 대하여 대칭 이동한 것과 같다.



따라서 $-2 \le x \le 1$ 에서
함수 $y = |x^2+2x-5|$ 의 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $y = 6$, 최솟값은 $x = 1$ 일 때 $y = 2$ 이므로
최댓값과 최솟값의 합은 8 이다.

10. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a - 2)^2$
따라서 m 은 $a = 2$ 일 때 최댓값 0 을 가진다.

11. $x+y=3,\ x \geq 0,\ y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x \geq 0,\ y \geq 0$ 이므로
$y=-x+3 \geq 0 \ \rightarrow \ -x \geq -3 \ \rightarrow \ x \leq 3 \therefore \ 0 \leq x \leq 3 \ (\because \ x \geq 0)$
또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$
완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$
$\therefore x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore M-m=12$

12. 길이가 80 m 인 끈으로 목장의 경계를 직사각형 모양으로 표시하려고 한다. 목장의 넓이를 최대로 하려면 이 울타리의 가로의 길이는 몇 m 로 정해야 하는가?

① 10 m　② 20 m　③ 30 m　④ 40 m　⑤ 50 m

해설

가로의 길이를 x m 라 하면 세로의 길이는 $(40-x)$ m 이므로
목장의 넓이를 y m^2 라 하면
$y = x(40-x) = -x^2 + 40x = -(x-20)^2 + 400 \cdots\cdots$ ㉠
이 때, $0 < x < 40$ 이므로 ㉠은 $x = 20$ 일 때 최대이고 최댓값은 400 이다.
따라서, 목장의 넓이를 최대로 하려면 울타리의 가로의 길이는 20 m 로 해야 한다

13. n 이 자연수일 때, 이차함수 $y=2n^2-11n+20$ 의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y=2n^2-11n+20$

$=2\left(n^2-\frac{11}{2}n+\frac{121}{16}\right)-\frac{121}{8}+20$

$=2\left(n-\frac{11}{4}\right)^2+\frac{39}{8}$

n 이 자연수이므로

$\frac{11}{4}$ 에 가장 가까운 자연수는 3 이다.

따라서 $n=3$ 일 때,

최솟값 $2\cdot3^2-11\cdot3+20=5$ 를 갖는다.

14. O(0, 0), A(7, 1), B(5, 5) 라 할 때, $\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$ 을 최소로 하는 점 P 의 좌표를 (α, β) , 그 때의 최솟값을 r 라 할 때, $\alpha + \beta + r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 46

해설

$\overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$

$= x^2 + y^2 + (x-7)^2 + (y-1)^2 + (x-5)^2 + (y-5)^2$

$= 3(x-4)^2 + 3(y-2)^2 + 40$

$(x-4)^2 \geq 0,\ (y-2)^2 \geq 0$ 이므로

$x = 4,\ y = 2$ 에서 최솟값 $r = 40$ 을 갖는다.

$\therefore\ \alpha + \beta + r = 46$

15. x 가 실수일 때, $\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$ 의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}=k$ 라 하면

$x^2-x+3=k\left(x^2+x+1\right)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-3=0$ 이 방정식이 성립하려면

(i) $k-1=0$, 즉 $k=1$ 일 때, $x=1$

따라서, $k=1$ 은 성립한다.

(ii) $k-1\neq 0$, 즉 $k\neq 1$ 일 때, x 가 실수이므로 이차방정식은 실근을 갖는다. 즉, 판별식 $D\geq 0$ 이다.

$D=(k+1)^2-4(k-1)(k-3)\geq 0$

$3k^2-18k+11\leq 0$

$\therefore \dfrac{9-4\sqrt{3}}{3}\leq k\leq \dfrac{9+4\sqrt{3}}{3}$

$0.\times\times\times \leq k \leq 5.\times\times\times$ 이므로 이 범위를 만족하는 정수 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ 이다.

(i), (ii) 에서 구하는 정수 k 의 개수는 5 개다.