

1. 자연수 a, b, c 에 대하여 $120a = 270b = 150c$ 이 성립할 때, $a+b+c$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 101

해설

$$120a = 2^3 \times 3 \times 5 \times a,$$

$$270b = 2 \times 3^3 \times 5 \times b,$$

$$150c = 2 \times 3 \times 5^2 \times c \text{ 이므로}$$

a, b, c 가 가장 작아지는 값은

$$120a = 270b = 150c = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \text{ 이다.}$$

$$\rightarrow a = 45, b = 20, c = 36$$

$$\therefore a + b + c = 101$$

2. 48 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 이때, 곱하여야 할 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

48 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$2 \overline{) 48}$$

$$2 \overline{) 24}$$

$$2 \overline{) 12}$$

$$2 \overline{) 6}$$

$$3$$

$48 = 2^4 \times 3$ 이므로 $2^4 \times 3 \times \square$ 가 어떤 자연수의 제곱이 되기 위한 \square 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 3이다.

3. 18 에 가장 작은 자연수를 곱하여 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$18 = 2 \times 3^2$ 이므로 어떤 자연수의 제곱이 되도록 하기 위해 곱해 주어야 할 수 중 가장 작은 수는 2 이다.

4. $90 \times A = B^2$ 을 만족하는 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

90 을 소인수분해하면 다음과 같다.

$$2 \overline{) 90}$$

$$3 \overline{) 45}$$

$$3 \overline{) 15}$$

$$5$$

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 $2 \times 3^2 \times 5 \times A = B^2$ 을 만족하는 A 의 값 중에서 가장 작은 자연수는 $2 \times 5 = 10$ 이다.

5. $2^3 \times \square$ 의 약수의 개수가 8 개일 때, 다음 중 \square 안에 들어 갈 수 없는 수를 모두 고르면?

- ① 3 ② 4 ③ 7 ④ 9 ⑤ 16

해설

② $2^3 \times 4 = 2^3 \times 2^2 = 2^5$ 이므로 약수의 개수는 $5 + 1 = 6$ (개)이다.

④ $2^3 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ 이므로 약수의 개수는 $(3 + 1) \times (2 + 1) = 12$ (개)이다.

6. $3^3 \times a$ 는 약수의 개수가 12인 수 중 가장 작은 홀수라고 할 때, a 에 맞는 수를 구하면?

① 1 ② 4 ③ 9 ④ 25 ⑤ 36

해설

$$12 = 4 \times 3 = (3 + 1) \times (2 + 1)$$

$3^3 \times a$ 가 홀수이므로

a 는 3보다 큰 소수의 제곱수이므로 $5^2 = 25$

7. $27 \times \square$ 는 약수의 개수가 12개인 가장 작은 자연수이다. \square 안에 들어갈 가장 작은 자연수는?

- ① 2 ② 2^2 ③ 2^3 ④ 3 ⑤ 3^2

해설

$3^3 \times \square$ 에서 $\square = a^x$ 이라 하면 약수의 개수는 $(3+1) \times (x+1) = 12$ (개) 이므로

$$(3+1) \times (x+1) = 4 \times (x+1) = 12$$

$$x+1 = 3 \quad \therefore x = 2$$

a 가 될 수 있는 가장 작은 소인수는 2 이므로

$$\square = 2^2$$

8. $14 \times \square \times 35$ 의 약수의 개수가 36 일 때, \square 안에 들어갈 가장 작은 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

(i) $\square = 2^a$ 일 때

$36 = (5+1) \times (2+1) \times (1+1)$ 이므로

$\square = 2^4 = 16$

(ii) $\square \neq 2^a$ 일 때

$36 = (a+1) \times (1+1) \times (2+1) \times (1+1)$

$a = 2$, 가장 작은 자연수는 $3^2 = 9$

\therefore (i), (ii)에서 가장 작은 자연수는 9

9. 가로, 세로의 길이가 각각 60cm, 84cm 인 직사각형 모양의 옷감을 똑같은 크기의 정사각형으로 자르려고 한다. 가능한 한 큰 정사각형으로 자르려 한다면 처음의 옷감은 몇 개로 나누어지겠는가?

- ① 21 개 ② 24 개 ③ 30 개 ④ 35 개 ⑤ 38 개

해설

가장 큰 정사각형의 한 변의 길이는 60, 84의 최대공약수이다.
 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ 의 최대공약수는 $2^2 \times 3 = 12$
따라서 나누어지는 개수는 $(60 \div 12) \times (84 \div 12) = 35$ (개)이다.

10. 가로 길이가 120cm, 세로 길이가 168cm 인 직사각형 모양의 벽면에 크기가 같은 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 붙이려고 한다. 타일의 개수를 최대한 적게 붙이려면 타일의 한 변의 길이는 몇 cm 이어야 하는가? 또한, 타일이 몇 개 사용되는가?

- ① 18cm, 35 개 ② 24cm, 35 개 ③ 18cm, 40 개
④ 24cm, 40 개 ⑤ 28cm, 40 개

해설

타일의 한 변의 길이를 x cm 라 하면,
 $120 = x \times \square$, $168 = x \times \triangle$
 x 는 120 과 168 의 최대공약수
 $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, $168 = 2^3 \times 3 \times 7$
 $\therefore x = 2^3 \times 3 = 24$ (cm)
 $120 = 24 \times 5$, $168 = 24 \times 7$ 이므로
필요한 타일의 개수는 $\therefore 5 \times 7 = 35$ (개)

13. $2^2 \times 3 \times 5$, $2 \times 3^2 \times 5$ 의 공배수가 아닌 것은?

- ① $2^3 \times 3^2 \times 5$ ② $2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$ ③ $2^3 \times 3 \times 5$
④ $2^2 \times 3^2 \times 5$ ⑤ $2^3 \times 3^3 \times 5^3$

해설

$2^2 \times 3 \times 5$, $2 \times 3^2 \times 5$ 의 공배수는 두 수의 최소공배수인 $2^2 \times 3^2 \times 5$ 의 배수이다.

14. 두 자연수 A, B 의 최소공배수가 28 일 때, A 와 B 의 공배수 중 200 이하의 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 7 개

해설

공배수는 최소공배수의 배수이므로, 최소공배수인 28의 배수 중 200보다 작은 자연수의 개수를 구한다. $200 \div 28 = 7.14\dots$ 따라서 200보다 작은 자연수의 개수는 7개이다.

15. 1에서 100까지의 자연수 중 2의 배수도 되고 5의 배수도 되는 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

2의 배수도 되고 5의 배수도 되는 수는 2와 5의 공배수와 같다. 100 이하의 2와 5의 공배수를 구하면 0, 20, 30, ... 100로 총 10개이다.

16. 세 자연수 16, 24, 48의 공배수 중 세 자리 자연수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 18 개

해설

16, 24, 48의 공배수는 48의 배수이다.
999까지의 48의 배수는 $999 \div 48 = 20 \cdots 39$ 이므로 20개 있고,
99까지의 48의 배수는 $99 \div 48 = 2 \cdots 3$ 이므로 2개 있다.
따라서 48의 배수 중 세 자리 자연수는 $20 - 2 = 18$ (개) 있다.

17. 100 부터 300 까지의 자연수 중에서 3, 4 중 어떤수로도 나누어 떨어지지 않는 수의 갯수는 모두 몇 개인가?

- ① 67 ② 99 ③ 100 ④ 101 ⑤ 200

해설

3의 배수의 갯수는 $100 - 33 = 67$,

4의 배수의 갯수는 $75 - 24 = 51$,

12의 배수의 갯수는 $25 - 8 = 17$

따라서 3, 4 중 어떤 수로도 나누어 떨어지지 않는 수의 갯수는

$201 - (67 + 51 - 17) = 100$

18. 100 이하의 자연수 중 5의 배수이거나 7의 배수인 것의 개수는?

- ① 31 개 ② 32 개 ③ 33 개 ④ 34 개 ⑤ 35 개

해설

100 이하의 자연수 중 5의 배수의 개수는 20개
100 이하의 자연수 중 7의 배수의 개수는 14개
100 이하의 자연수 중 5의 배수이면서 7의 배수인 것의 개수는 2개
100 이하의 자연수 중 5의 배수이거나 7의 배수인 것의 개수는 $20 + 14 - 2 = 32$

19. 1부터 200까지의 자연수 중에서 3의 배수이거나 5의 배수인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 93 개

해설

1부터 200까지의 자연수 중 3의 배수의 개수는 66개
1부터 200까지의 자연수 중 5의 배수의 개수는 40개
1부터 200까지의 자연수 중 3의 배수이면서 5의 배수인 것의 개수는 13개
1부터 200까지의 자연수 중 3의 배수이거나 5의 배수인 것의 개수는
 $66 + 40 - 13 = 93$

20. 1부터 100까지의 자연수 중에서 3의 배수이거나 5의 배수인 수는 모두 몇 개인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

1부터 100까지의 자연수 중에서
3의 배수는 3, 6, 9, \dots , 96, 99의 33개이고,
5의 배수는 5, 10, 15, \dots , 95, 100의 20개이다.
이 중 3과 5의 공배수인 15의 배수의 개수는 6개이므로
 $33 + 20 - 6 = 47$ 개다.

21. 원점으로부터 두 점 A, B 에 이르는 거리가 같고 $A - B = 6$ 일 때, 점 A 에 대응하는 수는?

- ① 0 ② -6 ③ -3 ④ +3 ⑤ +6

해설

두 점은 원점으로부터 같은 거리에 있고 A 가 B 보다 6 만큼 더 크므로 $A = 3, B = -3$ 이다.

22. 서로 다른 두 수 a, b 에 대하여 $|a| = |b|$ 이고, $a = b + \frac{1}{2}$ 일 때, a, b 의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = \frac{1}{4}$

▷ 정답: $b = -\frac{1}{4}$

해설

$a = b + \frac{1}{2}$ 이므로

$a > b$ 이고 a, b 사이의 거리는 $\frac{1}{2}$ 이다.

$\therefore a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}$

23. 절댓값이 같고 부호가 다른 두 수의 차가 $\frac{8}{3}$ 일 때, 두 수의 합을 구하면?

- ① 0 ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{16}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

해설

절댓값이 같고 부호가 다른 두 수의 합은 항상 0 이다.

24. 다음 두 조건을 만족하는 정수 A, B 를 구하면?

- ㄱ. A 와 B 의 절댓값은 같다.
- ㄴ. A 는 B 보다 6 만큼 크다.

▶ 답:

▷ 정답: $A = 3$

해설

두 수는 원점으로부터 같은 거리에 있고 6 만큼 떨어져 있으므로 $A = 3, B = -3$ 이다.

25. $\frac{1}{\frac{1}{a}} = 1 \div \frac{1}{a}$ 임을 이용하여 다음 식을 계산하여라. $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}}$

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= 1 - \frac{1}{1 - 1 \div \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{1 - 1 \times \frac{4}{3}} \\ &= 1 - 1 \div \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - 1 \times (-3) = 4 \end{aligned}$$

26. 다음 보기의 식을 계산하고 계산한 결과의 절댓값이 가장 작은 것의 기호를 써라.

보기

㉠ $-8 + 6 - 21$

㉡ $(-4) \times 7 - (-9)$

㉢ $(-3) + (-20) \div (-5)$

㉣ $6 - (-52) \div (-4)$

▶ 답:

▶ 정답: ㉢

해설

㉠ $-8 + 6 - 21 = 6 - 8 - 21 = 6 - 29 = -23$

㉡ $(-4) \times 7 - (-9) = -28 + (+9) = -19$

㉢ $(-3) + (-20) \div (-5) = (-3) + (+4) = +1$

㉣ $6 - (-52) \div (-4) = 6 - (+13) = 6 + (-13) = -7$

따라서 $|1| < |-7| < |-19| < |-23|$ 이므로 ㉢ 이 가장 작다.

27. 다음을 분배법칙을 이용하여 계산할 때, A, B, C, D 의 합을 구하여라.

$$\begin{aligned} (+3) \times \{(-2) + (+4)\} &= (+3) \times A + B \times (+4) \\ &= C + D = 6 \end{aligned}$$

▶ 답:

▷ 정답: 7 또는 +7

해설

$$\begin{aligned} (+3) \times \{(-2) + (+4)\} &= (+3) \times (-2) + (+3) \times (+4) \\ &= (-6) + 12 = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore A = -2, B = +3, C = -6, D = +12$$

따라서 A, B, C, D 의 합은 $(-2) + (+3) + (-6) + (+12) = 7$ 이다.

28. 다음 중 계산결과가 가장 작은 것을 고르면?

① $(-4) \times \{(-3) + (+2)\}$ ② $(-20) + (+4) \times (-2)$

③ $(-16) \div 4 - 3$ ④ $-7 + 1 - (-3)$

⑤ $5 \times 7 - (-3) \times (-2)$

해설

① $(-4) \times \{(-3) + (+2)\} = (-4) \times (-1) = 4$

② $(-20) + (+4) \times (-2) = (-20) + (-8) = -28$

③ $(-16) \div 4 - 3 = -4 - 3 = -7$

④ $-7 + 1 - (-3) = -7 + 1 + 3 = -3$

⑤ $5 \times 7 - (-3) \times (-2) = 35 - 6 = 29$

계산 결과가 가장 작은 것은 ②의 -28 이다.

29. 432를 자연수 x 로 나누어 어떤 자연수의 제곱이 되게 하려고 한다. 다음 중 x 의 값으로 알맞지 않은 것은?

- ① 3 ② 6 ③ 12 ④ 27 ⑤ 48

해설

$$\frac{432}{x} = \square^2$$

$$432 = 2^4 \times 3^3$$

나뉘어야 할 가장 작은 자연수는 3이다. 그러므로 3 또는 $3 \times$ (지수가 짝수인 수)의 꼴이 아닌 것을 찾는다.

- ① 3
② 2×3
③ $2^2 \times 3$
④ 3^3
⑤ $2^4 \times 3$

30. 54 에 두 자리 자연수 a 를 곱하였더니 b^2 이 되었다. 가능한 (a, b) 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : (24, 36)

▷ 정답 : (54, 54)

▷ 정답 : (96, 72)

해설

$54 \times a = 2 \times 3^3 \times a = b^2$ 이므로
 $a = 2 \times 3 \times x^2$ (x 는 자연수) 꼴이어야 한다.
 a 는 두 자리 자연수이므로
 $2 \times 3 \times 2^2 = 24, 2 \times 3 \times 3^2 = 54, 2 \times 3 \times 4^2 = 96$
(i) a 가 24 일 때
 $2 \times 3^3 \times 2^3 \times 3 = 2^4 \times 3^4 = (2^2 \times 3^2)^2 = 36^2$
 $\therefore b = 36$
(ii) a 가 54 일 때
 $2 \times 3^3 \times 2 \times 3^3 = (2 \times 3^3)^2 = 54^2$
 $\therefore b = 54$
(iii) a 가 96 일 때
 $2 \times 3^3 \times 2^5 \times 3 = 2^6 \times 3^4 = (2^3 \times 3^2)^2 = 72^2$
 $\therefore b = 72$
 $\therefore (24, 36), (54, 54), (96, 72)$

31. $\frac{n}{2}$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{3}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 432

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $\frac{n}{2}$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 네 번 곱해져 있고, $\frac{n}{3}$ 이 제곱이므로 n 은 3 이 세 번 곱해져 있다.
 $\therefore n = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 432$

32. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

- ① 100 ② 200 ③ 300 ④ 400 ⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5 가 세 번 곱해져 있다.

$$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$$

33. 자연수 a 의 약수의 개수를 $N(a)$ 로 나타낼 때 $N(600) \times N(a) = 96$ 인 자연수 a 중에서 가장 작은 수를 구하면?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \text{ 이므로 } N(600) = 4 \times 2 \times 3 = 24$$

$$24 \times N(a) = 96 \quad \therefore N(a) = 4$$

약수의 개수가 4개인 가장 작은 자연수는

$$6 = 2 \times 3 \text{ 이다.}$$

34. $n = 4p^2q^3$ 일 때, n 의 약수의 개수를 구하여라. (단, $p \neq q \neq 2$ 인 소수)

▶ 답: 개

▷ 정답: 36 개

해설

n 을 소인수분해하면 $n = 4p^2q^3 = 2^2 \times p^2 \times q^3$ 이다.
따라서 약수의 개수는 $(2+1) \times (2+1) \times (3+1) = 36$ (개) 이다.

35. 자연수 a 의 약수의 개수를 $f(a)$ 이라 할 때, $f(30) \times f(x) = 32$ 를 만족시키는 가장 작은 자연수 x 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$30 = 2 \times 3 \times 5$ 로 소인수분해되므로
 $f(30) = (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 8$ 이다.
 $f(30) \times f(x) = 32$ 에서 $f(x) = 4$
약수의 개수가 4 인 가장 작은 자연수는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

36. 100 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가 홀수인 수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 10 개

해설

약수의 개수가 홀수인 자연수는 제곱수이므로 $1^2, 2^2, \dots, 10^2$ 의 10 개가 있다.

37. 두 자연수 x, y 에 대하여 $2^x \times 3 \times 5^y$ 의 약수의 개수가 36일 때, $x+y$ 의 값으로 알맞은 것을 모두 구하면?

- ① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$(x+1) \times (1+1) \times (y+1) = 36$
 $(x+1) \times (y+1) = 18$
 $18 = 2 \times 9$ 또는 $18 = 3 \times 6$ 이므로
 $x+1 = 2, y+1 = 9$ 또는 $x+1 = 9, y+1 = 2$ 일 때,
 $x = 1, y = 8$ 또는 $x = 8, y = 1$
그러므로 $x+y = 9$
 $x+1 = 3, y+1 = 6$ 또는 $x+1 = 6, y+1 = 3$ 일 때,
 $x = 2, y = 5$ 또는 $x = 5, y = 2$
그러므로 $x+y = 7$

38. 360의 약수의 개수와 $2^3 \times 3^a \times 5^b$ 의 약수의 개수가 같을 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 자연수)

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $a = 2$, $b = 1$ 또는 $a = 1, b = 2$ 이다.
 $\therefore a + b = 3$

40. 약수의 개수가 36 개이고, $2^x \times 3^y \times 5^z \times 7$ 으로 소인수분해되는 자연수는 모두 몇 개인가? (단, x, y, z 는 자연수)

- ① 3개 ② 6개 ③ 9개 ④ 12개 ⑤ 15개

해설

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ 이므로

$(x, y, z) = (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1)$ 으로 3 개이다.

41. 1 부터 n 까지의 유리수 중에서 분모가 5 인 정수가 아닌 유리수의 개수가 100 개일 때, 자연수 n 의 값은?

- ① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

해설

1부터 n 까지의 유리수는
 $\frac{5}{5}$ 부터 $\frac{5n}{5}$ 까지의 유리수이다.
이 중 n 개의 정수가 있으므로
 $5n - 4 - n = 100$ 이다.
따라서 $4n = 104$, $n = 26$ 이다.

42. $\frac{240}{n}$ 의 값 중 정수의 개수를 구하여라.(단, n 은 0이 아닌 정수)

▶ 답: 개

▷ 정답: 40개

해설

$\frac{240}{n}$ 이 정수가 되려면 n 은 $\pm(240$ 의 약수)

$240 = 2^4 \times 3 \times 5$ 이므로

(240의 약수의 개수)

$= (4 + 1) \times (1 + 1) \times (1 + 1)$

$= 20$ (개)이다.

$\therefore 20 \times 2 = 40$

43. $a < b < 0$ 을 만족하는 a, b 에 대하여 다음 보기 중 옳지 않은 것을 구하면?

① $-a > -b$

② $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

③ $-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$

④ $a^2 > b^2$

⑤ $a+4 < b+4$

해설

② $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 는 $a = -2, b = -1$ 이라 할 때,

$-\frac{1}{2} > -\frac{1}{1}$ 이다.

44. 수직선 위에 나타낸 두 수 -7 와 8 의 가운데 수를 A , -5 과 -16 의 가운데 수를 B 라 할 때, 두 수 A , B 사이의 거리를 구한 것은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$A = \frac{-7+8}{2} = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{-5-16}{2} = -\frac{21}{2}$$

$$\begin{aligned} (A, B \text{ 사이의 거리}) &= \left| \frac{1}{2} - \left(-\frac{21}{2}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} + \frac{21}{2} \right| \\ &= 11 \end{aligned}$$