1. $a < 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $-\sqrt{(-a)^2} = -a$
② $-\sqrt{-a^2} = -a$
③ $-\sqrt{a^2} = -a$
④ $\sqrt{(-a)^2} = -a$
⑤ $\sqrt{a^2} = a$

해설

$a < 0$ 인 경우, $\sqrt{a^2} = -a$ 이다.
①$-\sqrt{(-a)^2} = -\sqrt{a^2} = -(-a) = a$
② 음수의 제곱근은 존재하지 않는다.
③ a
⑤ $-a$

2. 다음 보기 중 옳은 것은?

보기

㉠ $a > 0$ 일 때, a 의 제곱근을 x 라고 하면 $x^2 = a$ 이다.
㉡ 제곱근 9 와 9 의 제곱근은 서로 같다.
㉢ $\sqrt{(-7)^2} + (-\sqrt{3})^2 = 10$
㉣ $\sqrt{20}$ 은 $\sqrt{5}$ 의 4 배이다.
㉤ -7 은 49 의 제곱근이다.
㉥ $a < 0$ 일 때, $\sqrt{a^2} = -a$ 이다.

▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▶ 답 :
▷ 정답 : ㉠
▷ 정답 : ㉢
▷ 정답 : ㉤
▷ 정답 : ㉥

해설

㉡ 제곱근 9는 $\sqrt{9} = 3$ 이고, 9 의 제곱근은 ± 3 이다.
㉣ $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ 이므로 $\sqrt{5}$ 의 2 배이다.

3. $a < 0$ 일 때, $-\sqrt{(-a)^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : a

해설

$-\sqrt{(-a)^2} = -\sqrt{a^2} = -|a| = a$

4. 두 실수 a, b 에 대하여 $a-b<0$, $ab<0$ 일 때, $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(-b)^2}$ 을 간단히 한 것은?

① 0　② $2a$　③ $a-b$　④ $2b$　⑤ $a+b$

해설

$ab<0$ 이면 a와 b의 부호가 다르다.
$a-b<0$ 이면 $a<b$ 이므로 $a<0$, $b>0$ 이다.
$a<0$ 이므로 $\sqrt{a^2}=-a$, $b>0$ 이므로 $\sqrt{b^2}=b$
$a<0$ 이므로 $\sqrt{(-a)^2}=\sqrt{a^2}=-a$
$b>0$ 이므로 $\sqrt{(-b)^2}=\sqrt{b^2}=b$
따라서
$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(-b)^2}$
$=-a+b-(-a)+b$
$=2b$

5. $a > 0$ 일 때, $A = \sqrt{(-a)^2} + (-\sqrt{a})^2 + \sqrt{a^2} - \sqrt{a^2}$ 일 때, $\sqrt{A}$ 의 값은?

① $-3a$　② $-2a$　③ a　④ $\sqrt{2a}$　⑤ $\sqrt{3a}$

해설

$A = |-a| + a + |a| - |a| = 2a$

$\sqrt{A} = \sqrt{2a}$

6. $a > 0$ 일 때, $-\sqrt{25a^2} \div (\sqrt{-3a})^2 \times \sqrt{(-\frac{1}{4}a)^2} \times \left(\sqrt{0.2a}\right)^2$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\dfrac{a^2}{12}$

해설

$-\sqrt{25a^2} \div (\sqrt{-3a})^2 \times \sqrt{(-\frac{1}{4}a)^2} \times \left(\sqrt{0.2a}\right)^2$

$= -|5a| \div |3a| \times |\frac{1}{4}a| \times |\frac{1}{5}a|$

$= -5a \times \dfrac{1}{3a} \times \dfrac{1}{4}a \times \dfrac{1}{5}a$

$= -\dfrac{a^2}{12}$

7. $\sqrt{135 \times a}$ 가 자연수가 되게 하는 a 의 값 중에서 가장 작은 세 자리의 자연수와 가장 큰 세 자리의 자연수의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 825

해설

$135 = 3^3 \times 5 = 3^2 \times 15$

$\sqrt{135 \times a}$ 가 자연수가 되려면

$a = 15 \times$ (제곱수) 이어야 한다.

$15 \times 4 = 60,\ 15 \times 9 = 135,\ \ldots$

$15 \times 49 = 735,\ 15 \times 64 = 960$

$\therefore\ 960 - 135 = 825$

8. $\sqrt{180x}$ 가 양의 정수가 되도록 하는 가장 작은 두 자리의 자연수 x를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 20$

해설

$180x = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times x$이고,
x는 가장 작은 두 자리의 자연수이므로
$x = 2^2 \times 5 = 20$ 이다.

9. 다음 주어진 식이 자연수 n이 되도록 하는 m의 최솟값을 차례대로 구하여라.

	자연수 m의 최솟값	n
$n = \sqrt{65m}$	㉠	
$n = \sqrt{75m}$	㉡	
$n = \sqrt{\frac{80}{m}}$	㉢	

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ : 65

▷ 정답 : ㉡ : 3

▷ 정답 : ㉢ : 5

해설

㉠ $65m = 5 \times 13 \times m$ 이므로 $m = 5 \times 13 = 65$ 이고 $n = \sqrt{65 \times 65} = 65$ 이다.

㉡ $75m = 3 \times 5^2 \times m$ 이므로 $m = 3$ 이고 $n = \sqrt{75 \times 3} = 15$ 이다.

㉢ $\frac{80}{m} = \frac{2^4 \times 5}{m}$ 이므로 $m = 5$ 이고 $n = \sqrt{\frac{80}{5}} = 4$ 이다.

10. n이 자연수이고 $1 < n < 30$ 일 때, $\sqrt{4n}$ 이 자연수가 되도록 하는 n의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4개

해설

$4n = 2^2 \times n$ 이므로
$n = 2^2,\ 3^2,\ 2^4,\ 5^2,\ 2^2 \times 3^2 \cdots$ 이 있다.
$1 < n < 30$ 라고 하였으므로,
$n = 2^2,\ 3^2,\ 2^4,\ 5^2$ 4개이다.

11. $\sqrt{126x}$ 가 정수가 되기 위한 자연수 x 의 값 중에서 두 번째로 작은 수의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 56

해설

$\sqrt{126x} = \sqrt{2 \times 3 \times 3 \times 7 \times x}$

$x = 14a^2$

$a = 2$ 일 때, $x = 14 \times 2^2$

$\therefore x = 56$

12. a 가 120과 210 사이의 수일 때, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$ 가 정수가 되도록 하는 a 를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 147

▷ 정답 : 192

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}} = b$ (b 는 정수)이므로 $a = 3b^2$ 의 꼴이면 된다.

$120 < 3b^2 < 210$

$40 < b^2 < 70$

$b = 7, 8$

$\therefore a = 3 \times 7 \times 7 = 147$ 또는 $a = 3 \times 8 \times 8 = 192$

13. 부등식 $\frac{1}{2} < \sqrt{9x} < 5$ 를 만족하는 자연수 x 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{1}{2} < \sqrt{9x} < 5 \Rightarrow \frac{1}{6} < \sqrt{x} < \frac{5}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{36} < x < \frac{25}{9}$ $\therefore x = 1,\ 2$

14. $\sqrt{30} < x < \sqrt{50}$ 을 만족하는 자연수 x 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

▷ 정답 : $x = 7$

해설

$6 = \sqrt{36}$, $7 = \sqrt{49}$

15. $4.6 < \sqrt{x} < 5.1$ 을 만족하는 자연수 x 의 값에서 가장 큰 수를 a , 가장 작은 수를 b 라고 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a-b=4$

해설

$4.6 = \sqrt{21.16}$, $5.1 = \sqrt{26.01}$,

$\sqrt{21.16} < \sqrt{x} < \sqrt{26.01}$ 을 만족하는

$x = 22,\ 23,\ 24,\ 25,\ 26$

$a = 26,\ b = 22$

$\therefore a-b = 26-22 = 4$

16. $\sqrt{3x-1} \le 2$ 일 때, 만족하는 정수 x 값의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 1 개

해설

$\sqrt{3x-1} \le 2$, $0 \le 3x-1 \le 4$, $\frac{1}{3} \le x \le \frac{5}{3}$
따라서, 만족하는 정수 x 의 값은 1 의 1 개뿐이다.

17. $13 < \sqrt{7x^3} < 15$ 를 만족하는 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$13 < \sqrt{7x^3} < 15$

$169 < 7x^3 < 225$

$24.\times\times < x^3 < 32.\times\times$

$x^3 = 27$

$\therefore\ x = 3$

18. 부등식 $\sqrt{7} \le x < 3\sqrt{6}$ 을 만족하는 짝수 x를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

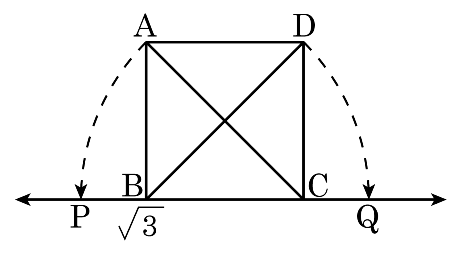
▷ 정답: 4

▷ 정답: 6

해설

$\sqrt{7} \le x < 3\sqrt{6}$ 이므로 $7 \le x^2 < 54$
따라서 $x = 3, 4, 5, 6, 7$ 이다.
그러므로 이를 만족하는 짝수는 4, 6 이다.

19. 다음 그림에서 사각형 ABCD 는 한 변의 길이가 1 인 정사각형이고, B($\sqrt{3}$) 이다. 이 때, 점 P의 좌표를 구하면?

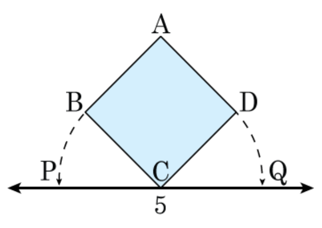


① $2\sqrt{3}$　② $-1+2\sqrt{2}$　③ $-1+2\sqrt{3}$
④ $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$　⑤ $1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

해설

정사각형 한 변의 길이가 1 이므로 점 C 의 좌표는 C($\sqrt{3}+1$) 이다.
정사각형 한 변의 길이가 1 이므로 대각선 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.
따라서 점 P 의 좌표는 P($\sqrt{3}+1-\sqrt{2}$) 이다.

20. 다음과 같은 정사각형이 있을 때, $\overline{AC}$의 길이는 6cm이다. 이 때, 점 P와 점 Q의 좌표를 각각 구하여라.



다음과 같은 정사각형이 있을 때, $\overline{AC}$ 의 길이는 6cm이다. 이 때, 점 P와 점 Q의 좌표를 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

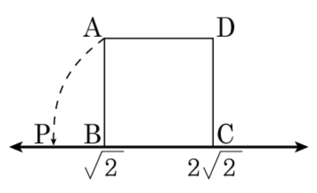
▷ 정답 : $P(5-3\sqrt{2})$

▷ 정답 : $Q(5+3\sqrt{2})$

해설

$\overline{AC} = 6\text{cm}$ 이므로 $\overline{AD} = \overline{CD} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$ 이다.
그러므로 $P(5-3\sqrt{2})$, $Q(5+3\sqrt{2})$ 이다.

21. 다음 그림에서 □ABCD 는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형이고, $\overline{AC} = \overline{PC}$ 일 때, P 의 좌표를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $P(2\sqrt{2}-2)$

해설

한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형의 대각선의 길이는 2 이다.
그러므로 P 의 좌표는 $C(2\sqrt{2})$ 에서 왼쪽으로 2 만큼 이동한 점이므로 $(2\sqrt{2}-2)$ 이다.

22. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ 수직선에 나타낼 수 없는 무리수도 있다. ㉡ $-\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{2}$ 사이에는 4 개의 정수가 있다. ㉢ 수직선은 유리수와 무리수에 대응하는 점들로 완전히 메워져 있다. ㉣ 수직선 위에서 오른쪽에 있는 실수가 왼쪽에 있는 실수보다 크다. ㉤ 수직선 위에는 유리수에 대응하는 점들만 있는 것이 아니고 무리수에 대응하는 점들도 있다. ㉥ 서로 다른 두 무리수의 합은 반드시 무리수이다. ㉦ 서로 다른 두 유리수의 합은 반드시 유리수이다.

① 7 개 ② 6 개 ③ 5 개 ④ 4 개 ⑤ 3 개

해설

㉠ 모든 유리수는 수직선 위에 나타낼 수 있다.
㉡ $1 < \sqrt{2} < 2$ 이므로 $-\sqrt{2}$ 와 $\sqrt{2}$ 사이에는 $-1, 0, 1$ 의 3 개의 정수가 있다.
㉥ $(\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) = 0$ 은 유리수이다.

23. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 골라라.

보기

㉠ 두 자연수 2와 3 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.

㉡ $\sqrt{3}$과 $\sqrt{5}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.

㉢ 수직선은 무리수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 있다.

㉣ -2와 $\sqrt{2}$ 사이에는 4개의 정수가 있다.

㉤ 1과 2사이에는 2개의 무리수가 있다.

㉥ $\sqrt{5}$와 $\sqrt{7}$사이에는 1개의 자연수가 있다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉡

해설

㉠. ○ 두 자연수 2 와 3 사이에는 무수히 많은 무리수가 있다.
㉡. ○ $\sqrt{3}$ 과 $\sqrt{5}$ 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.
㉢. × 수직선은 무리수에 대응하는 점으로 완전히 메울 수 있다.(유리수에 대응하는 점을 메울 수 없다.)
㉣. × -2 와 $\sqrt{2}$ 사이에는 4 개의 정수가 있다.(-1, 0, 1 3개가 있다.)
㉤. × 1 과 2 사이에는 2 개의 무리수가 있다.(무수히 많은 무리수가 있다.)
㉥. × $\sqrt{5}$ 와 $\sqrt{7}$ 사이에는 1 개의 자연수가 있다.($\sqrt{5}$ 와 $\sqrt{7}$ 사이에는 자연수가 없다.)

24. -5 와 $\sqrt{5}$ 사이에 있는 수에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?

① 무수히 많은 실수가 있다.
② 무수히 많은 무리수가 있다.
③ 무수히 많은 유리수가 있다
④ 자연수가 2 개 있다.
⑤ 정수가 6 개 있다.

해설
$\sqrt{5} \fallingdotseq 2.23..$ 이므로
-5 와 $\sqrt{5}$ 사이에는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ 의 7 개의 정수가 있다.

25. 다음 세 수의 크기를 비교하여라.
$a = 3\sqrt{3}, \quad b = 3\sqrt{5} + \sqrt{3}, \quad c = 4\sqrt{3} - \sqrt{5}$

▶ 답 :

▷ 정답 : $c < a < b$

해설

각각의 수에 대하여
$a - b = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{5} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} = \sqrt{12} - \sqrt{45} < 0$ 이므로 $a < b$
$b - c = 3\sqrt{5} + \sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{5} = 4\sqrt{5} - 3\sqrt{3} = \sqrt{80} - \sqrt{27} > 0$ 이므로 $b > c$
$a - c = 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{5} - \sqrt{3} > 0$ 이므로 $a > c$
따라서 a, b, c 의 대소 관계를 나타내면 $c < a < b$ 이다.

26. 다음 수를 수직선 위에 나타낼 때, 오른쪽에서 두 번째에 위치하는 수를 찾아라.

$\sqrt{5}+3$, $-\sqrt{6}-\sqrt{2}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}+\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{6}+\sqrt{5}$

해설

$3+\sqrt{5}-(\sqrt{6}+\sqrt{5})=3-\sqrt{6}>0$이므로 $3+\sqrt{5}>\sqrt{6}+\sqrt{5}$
$\sqrt{6}+\sqrt{5}-(2+\sqrt{5})=\sqrt{6}-2>0$이므로 $\sqrt{6}+\sqrt{5}>2+\sqrt{5}$
따라서 두 번째로 큰 수는 $\sqrt{6}+\sqrt{5}$이다.

27. 세 수 $A = \sqrt{12} + \sqrt{6}$, $B = \sqrt{11} + \sqrt{7}$, $C = \sqrt{10} + \sqrt{8}$ 에 대하여 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{12} + \sqrt{6}$

해설

세 수에 대하여

$A^2 = (\sqrt{12} + \sqrt{6})^2 = 18 + 2\sqrt{72}$

$B^2 = (\sqrt{11} + \sqrt{7})^2 = 18 + 2\sqrt{77}$

$C^2 = (\sqrt{10} + \sqrt{8})^2 = 18 + 2\sqrt{80}$

$A^2 < B^2 < C^2$ 에서

A, B, C 가 모두 양수이므로 $A < B < C$ 이다.

따라서 가장 작은 수는 $\sqrt{12} + \sqrt{6}$ 이다.