1. $\frac{k}{3}(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)$ 와 같은 것은?

① $\frac{1}{6}(k+1)(k+3)(k+4)$
② $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$
③ $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$
④ $\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)(k+3)$
⑤ $\frac{1}{4}(k+1)(2k+1)(3k+2)$

해설

$(k+1)(k+2)=\frac{3}{3}(k+1)(k+2)$ 이므로

공통인수 $\frac{1}{3}(k+1)(k+2)$ 로 묶으면

(준 식)$=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

2. 등식 $3x-2yi=(2+i)^2$이 성립하는 x, y에 대하여 두 수를 곱하면?

① -2　② -1　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$3x-2yi=(2+i)^2=3+4i$

$x=1$, $y=-2$

$\therefore\ xy=-2$

3. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$ ② $z=4-3i$ ③ $z=6-3i$

④ $z=2+3i$ ⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi) \\
&= (6-2a-2b)+(2a+4b)i
\end{aligned}
$$

$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$

$\therefore a=6, b=-3$

$\therefore z=6-3i$

4. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ii) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

5. 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\frac{D}{4} = (k-a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

6. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=-2 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=-5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 를 풀면 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 이다.
이때, $\alpha\beta\gamma$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 세 식을 변변끼리 더하면
$2(x+2y+3z)=-2$,즉 $x+2y+3z=-1$ $\cdots\cdots ㉣$
㉣ − ㉡을 하면 $x=1$
㉣ − ㉢을 하면 $y=2$
㉣ − ㉠을 하면 $z=-2$
$\therefore$ $\alpha\beta\gamma=xyz=-4$

7. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

8. 다음 연립부등식을 풀어라.

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 \le 0 \\ x^2 + 2x + 2 \ge 0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$x^2 - 2x + 1 \le 0 \to (x-1)^2 \le 0$
$(x-1)^2$은 항상 0 이상이므로
만족하는 해는 $x = 1$이 유일
$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0$
$\to (x+1)^2 + 1 \ge 1$
$\therefore$ 모든 실수
$\therefore x = 1$

9. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 && \text{(분배)}\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) && \text{(분배)}\\ &= x^2+(3x+2x)+6 && \text{(결합)}\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

10. 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, $3R$ ③ $3Q(x)$, R
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$f(x)=Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R=\frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$

11. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a - b = 2004 - 2001 = 3$

$\therefore\ (a-b)^3 = 3^3 = 27$

12. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$\therefore$ (대각선의 길이) $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{25}=5$

13. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2$는 $x - 1$로 나누어떨어지므로
$f(1) - 2 = 0$ $\therefore$ $1 + a + b - 2 = 0$
$\therefore$ $a + b = 1 \cdots$ ①
$f(x) + 2$는 $x + 1$로 나누어떨어지므로
$f(-1) + 2 = 0$ $\therefore$ $1 - a + b + 2 = 0$
$\therefore$ $-a + b = -3 \cdots$ ②
①, ② 에서 $a = 2,\ b = -1$
$\therefore$ $a - 2b = 4$

14. x^4+4y^4 의 인수인 것은?

① x^2+y^2 ② x^2+2y^2 ③ $x^2+xy+2y^2$
④ $x^2-xy+2y^2$ ⑤ $x^2+2xy+2y^2$

해설

$$\begin{aligned} x^4+4y^4 &= x^4+4x^2y^2+4y^4-4x^2y^2 \\ &= (x^2+2y^2)^2-(2xy)^2 \\ &= (x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2) \end{aligned}$$

15. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a=-2$

▷ 정답: $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

16. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2 , 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$f(\alpha)=0,\ f(\beta)=0$이고 조건에서
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$f(2x+1)=0$에서
$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$
$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\beta-1}{2}$
따라서 $f(2x+1)=0$의 근은 $\dfrac{\alpha-1}{2},\ \dfrac{\beta-1}{2}$
이때 두 근의 합 $\dfrac{\alpha-1}{2}+\dfrac{\beta-1}{2}$
$=\dfrac{\alpha+\beta-2}{2}=\dfrac{2-2}{2}=0$

17. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$의 판별식을 D라 할 때 $D < 0$ 이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$

$k^2 - 2k - 8 < 0$, $(k+2)(k-4) < 0$

$\therefore -2 < k < 4$

따라서, k값 중 정수인 것은 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

18. $a-1 \le x \le a+4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4$ 의 최댓값이 4 일 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$f(x) = x^2 - 2ax + 4 = (x-a)^2 - a^2 + 4$

이때, 꼭짓점의 x 좌표 a 가 x의 값의 범위에 속하므로

$x = a$ 일 때 최솟값, $x = a+4$ 일 때 최댓값을 갖는다.

즉, $f(a+4) = (a+4)^2 - 2a(a+4) + 4 = 4$

$a^2 + 8a + 16 - 2a^2 - 8a + 4 = 4$

$a^2 = 16$

$\therefore a = 4 \ (a > 0)$

19. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t = 2$일 때 1이다.

20. x, y가 실수일 때, $x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$의 최솟값을 구하여라.

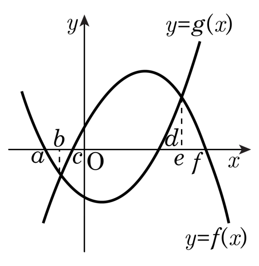
▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 6x + 2y^2 + 4y + 7$
$= (x-3)^2 + 2(y+1)^2 - 4$이므로
$x = 3,\ y = -1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

21. 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는?



① $a<x<c,\ d<x<f$

② $a<x<b,\ e<x<f$

③ $b<x<c,\ d<x<e$

④ $a<x<c,\ e<x<f$

⑤ $x<a,\ c<x<d,\ x>f$

해설

$f(x)g(x)>0$ 이면

$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

따라서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 모두 x축보다 위쪽에 있거나 또는 모두 x축보다 아래쪽에 있어야 한다.

$\therefore a<x<c,\ d<x<f$

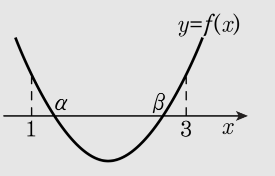
22. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

23. $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1 ② 2 ③ -2 ④ -3 ⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면
$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$
이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은
$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1,\ y = 0$
$\therefore\ A(1, 0)$

(ii) $\mathrm{A}(1, 0), \mathrm{B}(b, 1)$에서
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$
$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore\ b = 0,\ 2$
$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

24. x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 5이고, 그 몫을 다시 $x+3$으로 나눈 나머지가 3일 때, $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

x에 대한 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $Q(x)$,
$Q(x)$를 $x+3$으로 나눈 몫을 $Q_1(x)$라 하면
$P(x) = (x-2)Q(x)+5, Q(x) = (x+3)Q_1(x)+3$이므로
$P(x) = (x-2)\{(x+3)Q_1(x)+3\}+5$
$\quad = (x-2)(x+3)Q_1(x)+3x-1$
$\therefore\ P(-3) = -9-1 = -10$
따라서 $xP(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는
$-3P(-3) = -3\times(-10) = 30$

해설

나머지정리에 의해 $Q(-3) = 3$
$P(x) = (x-2)Q(x)+5$에서 양변에 x를 곱하면
$xP(x) = x(x-2)Q(x)+5x\cdots$①
나머지정리에 의해 $xP(x)$를 $x+3$로 나눈 나머지는 $-3P(-3)$이다.
①의 양변에 $x=-3$을 대입하면
$-3P(-3) = -3\cdot(-5)Q(-3)-15$
$Q(-3) = 3$을 대입하면 $-3P(-3) = 30$

25. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 z, $\overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

26. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\dfrac{1}{\beta},\ \beta+\dfrac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 x의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$과 같다. $a,\ b$의 값을 구하면?

① $a=3,\ b=-2$　　② $a=0,\ b=-\dfrac{1}{2}$

③ $a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{1}{3}$　　④ $a=2,\ b=-\dfrac{1}{4}$

⑤ $a=1,\ b=\dfrac{1}{2}$

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=-a \cdots\cdots$ ①

$\alpha\beta=b \cdots\cdots$ ②

$\alpha+\dfrac{1}{\beta},\ \beta+\dfrac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$이므로

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)=-a \cdots\cdots$ ③

$\left(\alpha+\dfrac{1}{\beta}\right)\times\left(\beta+\dfrac{1}{\alpha}\right)=b \cdots\cdots$ ④

③에서 $\alpha+\beta+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-a$

$\therefore\ -a+\dfrac{-a}{b}=-a \quad \therefore\ -\dfrac{a}{b}=0 \quad \therefore\ a=0$

④에서 $\alpha\beta+\dfrac{1}{\alpha\beta}+2=b,\ \ b+\dfrac{1}{b}+2=b,$

$\dfrac{1}{b}+2=0 \quad \therefore\ b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore a=0,\ b=-\dfrac{1}{2}$

27. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$

$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$

$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$

$\therefore\ 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$

연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a=k-2,\ b=8-2k,\ 14=5k-6$

$\therefore\ \ k=4,\ a=2,\ b=0$

28. 삼차방정식 $x^3 - 2x^2 - 4x + k = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = \alpha\beta\gamma$를 만족할 때, k의 값을 구하면?

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$\alpha + \beta + \gamma = 2,\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -4,\ \alpha\beta\gamma = -k$ 이므로

$\alpha + \beta = 2 - \gamma,\ \beta + \gamma = 2 - \alpha,\ \gamma + \alpha = 2 - \beta$

주어진 식은 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 4(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma$

$\therefore\ 8 - 8 - 8 + k = -k$

$\therefore\ k = 4$

29. 연립방정식 $\begin{cases} x(y+z)=10 \\ y(z+x)=18 \\ z(x+y)=24 \end{cases}$ 의 해를 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 라 할 때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값은?

① ± 2 ② ± 4 ③ ± 8 ④ ± 16 ⑤ ± 32

해설

$\begin{cases} x(y+z)=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ y(z+x)=18 & \cdots\cdots ㉡ \\ z(x+y)=24 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢ : $2(xy+yz+zx)=52$

$\therefore\ xy+yz+zx=26$

$\therefore\ xy=2,\ yz=16,\ zx=8\ \cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $(xyz)^2=16^2 \quad \therefore\ xyz=\pm 16$

$\therefore\ x=\alpha=\pm 1,\ y=\beta=\pm 2,\ z=\gamma=\pm 8$ (복부호동순)

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=\pm 16$

30. 부등식 $(x-2)(ax-1)<0$의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a가 있다.
② $a=0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.
③ $a<0$이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a}<x<2$이다.
④ $a>0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.
⑤ ①, ②, ③, ④ 모두 거짓이다.

해설

① $a\neq 0$일 때

$(x-2)(ax-1)=a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$이므로

$a=\frac{1}{2}$이면 이 부등식의 해는 없다.

② $a=0$이면 이 부등식은 $-(x-2)<0$,
즉 $x-2>0$이므로 해는 $x>2$이다.

③ $a<0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$이므로

$x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>2$이다.

④ $a>0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$이므로

$a<\frac{1}{2}$일때, $2<x<\frac{1}{a}$,

$a>\frac{1}{2}$일때 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

31. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$ ② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$ ④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2+bx+c<0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ 이므로
$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta),\ a>0$

$\therefore\ \alpha+\beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ c<0$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2+bx+a &= c\left(x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}\right) \\ &= c\left(x^2-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= c\left\{x^2-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\} \\ &= c\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right) < 0 \end{aligned}$$

$c<0$ 이고 $\frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

32. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ −1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
−1 은 속하지 않는다.

33. n이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

(ⅰ) $f(x)=x^{2n}(x^2+ax+b)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$f(-2)=4^n(4-2a+b)=0$

$\therefore\ b=2a-4$

(ⅱ) $f(x)=x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$
$=x^{2n}(x+2)(x+a-2)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$\therefore x^{2n}(x+a-2)=(x+2)Q(x)+4^n$

$x=-2$를 대입하면

$4^n(-4+a)=4^n$, $-4+a=1$

$\therefore\ a=5$

$b=2a-4$에서 $b=6$

$\therefore\ a+b=11$

34. 다항식 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지고 $x+4$로 나누면 3이 남는다. $f(x)$를 $(x+2)^2(x+4)$로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $\frac{3}{4}(x+2)^2$ ② $\frac{3}{2}(x+2)^2$ ③ $3(x+2)^2$
④ $(x+2)(x+4)$ ⑤ $3x^2+4x+3$

해설

$f(x)=(x+2)^2(x+4)Q(x)+ax^2+bx+c$라 놓으면 $f(x)$는 $(x+2)^2$으로 나누어떨어지므로
$ax^2+bx+c=a(x+2)^2$
$\therefore\ f(x)=(x+2)^2(x+4)Q(x)+a(x+2)^2$
또 $f(x)$를 $(x+4)$로 나눌 때 나머지가 3이므로 $f(-4)=3$
$\therefore\ 4a=3,\ a=\frac{3}{4}$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $\frac{3}{4}(x+2)^2$

35. $10^{20}-4$ 과 $10^{30}-8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리　② 11자리　③ 12자리
④ 13자리　⑤ 14자리

해설

$$10^{20}-4=(10^{10})^2-2^2$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{10}+2\right)$$
$$10^{30}-8=(10^{10})^3-2^3$$
$$=\left(10^{10}-2\right)\left(10^{20}+10^{10}\times 2+4\right)$$

$\therefore$ 최대 공약수는 $2\left(10^{10}-2\right)=2\cdot 10^{10}-4$

$\therefore$ 11자리수

36. $f(n) = (n+1)i^n - ni^{n+1}$ 이라고 할 때, 다음 중 옳은 것은? (단, n 은 자연수이고, $i^2 = -1$ 이다.)

① $f(n+1) - f(n)$ 은 실수이다.

② $f(n+1) - f(n)$ 은 순허수이다.

③ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 실수이다.

④ $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3)$ 은 순허수이다.

⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$ 은 순허수이다.

해설

k가 정수일 때 $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i$,
$i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$이므로
$f(1) = 2i + 1$,$f(2) = -3 + 2i$, $f(3) = -4i - 3$, $f(4) = 5 - 4i$
$f(5) = 6i + 5$,$f(6) = -7 + 6i$, $f(7) = -8i - 7$,$f(8) = 9 - 8i$
① $f(3) - f(2) = -6i$ (거짓)
② $f(2) - f(1) = -4$ (거짓)
③ $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = -4i$ (거짓)
④ $f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 4$ (거짓)
⑤ $f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$

$$= \{f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\} + \{f(5) + f(6) + f(7) + f(8)\}$$
$$= -4i - 4i = -8i \text{ (참)}$$

37. 삼차다항식 $f(x)$와 이차다항식 $g(x)$가 다음의 세 조건을 만족한다.

(A) $f(x)$를 $g(x)$로 나누면, 몫이 $x-2$이고 나머지가 $x+6$이다.
(B) $f(x)-(x-7)g(x)$는 $x+1$로 나누어떨어진다.
(C) 방정식 $g(x)=2x+5$의 해는 $-2, 1$이다.

이 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것을 구하면 ?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

(A)에서 $f(x)=(x-2)g(x)+x+6$이므로 $x=-1$을 대입하면
$f(-1)=-3g(-1)+5\cdots\cdots$ ㉠
(B)에서 $f(-1)+8g(-1)=0\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하면,
$f(-1)=8,\ g(-1)=-1\cdots\cdots$ ㉢
(C)에서 $g(x)-(2x+5)=0$의 해가 $-2,\ 1$이므로,
$g(x)-(2x+5)=a(x+2)(x-1)$
$g(x)=a(x+2)(x-1)+2x+5$
㉢에서 $g(-1)=-2a+3=-1$이므로 $a=2$
$\therefore\ g(x)=2x^2+4x+1$
$\therefore\ f(x)=(x-2)g(x)+x+6$
$\qquad\quad =2x^3-6x+4=2(x-1)^2(x+2)$
따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근 중 가장 작은 것은 -2이다.

38. x 에 관한 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+4k+4=0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 k 의 값들의 합을 구하면?

① -1 ② 7 ③ 6 ④ -6 ⑤ 1

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $(\alpha \geq \beta)$

$\alpha+\beta=-2(k-1)\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\beta=4k+4\cdots\cdots$ ㉡

㉠×2+㉡을 하면 $\alpha\beta+2\alpha+2\beta=8$, $(\alpha+2)(\beta+2)=12,\quad \alpha\beta=-10, 0, 2, 42, 32, 30$

그런데 $\alpha,\ \beta$가 정수이므로 ㉡에서

$k=\dfrac{\alpha\beta-4}{4}$

따라서 k의 정수값은 $-1,\ 7$

$\therefore\ k$의 값들의 합은 6

39. a, b, c는 실수이고, $a(a+b+c)>0$, $a(b+2a)<0$을 만족시킬 때, ab $\boxed{가}$ 0, $b(a+b+c)$ $\boxed{나}$ 0이다. 가, 나에 알맞은 기호를 차례로 쓰면?

① $<$, $<$　　② $<$, $>$

③ $>$, $>$　　④ $>$, $<$

⑤ 결정할 수 없다.

해설

$a(a+b+c)>0$에서 $a\neq 0$, $a+b+c\neq 0$임을 알 수 있다.
한편 $a(b+2a)=ab+2a^2<0$에서 $ab<-2a^2<0$이므로 $ab<0$이다.
또 $ab<0$이므로 $ab(a+b+c)^2<0$에서 $\{a(a+b+c)\}\{b(a+b+c)\}<0$이다.
그런데, $a(a+b+c)>0$이므로 $b(a+b+c)<0$이다.

40. 부등식 $\frac{1}{3} <= \frac{x^2 - ax + a^2}{x^2 + x + 1} \le 3$이 x의 값에 관계없이 성립하기 위한 실수 a의 값의 범위를 D라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\{a \mid -1 < a < 1\} \subset D$　② $\{a \mid a = -1,\ 1\} \subset D$

③ $\left\{a \mid -\frac{3}{5} \le a \le 1\right\} \subset D$　④ $\left\{a \mid a \le -\frac{3}{5}\right\} \subset D$

⑤ $\{a \mid a > 1\} \subset D$

해설

$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$이므로

$3(x^2 + x + 1)$을 주어진 부등식에 곱하면

$x^2 + x + 1 \le 3(x^2 - ax + a^2) \le 9(x^2 + x + 1)$

정리하면, $2x^2 - (3a + 1)x + 3a^2 - 1 \ge 0 \cdots\cdots$ ㉠

$2x^2 + (a + 3)x + 3 - a^2 \ge 0 \cdots\cdots$ ㉡

모든 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$D = (3a + 1)^2 - 8(3a^2 - 1) \le 0,$

$(5a + 3)(a - 1) \ge 0$

$\therefore\ a \le -\frac{3}{5},\ a \ge 1 \cdots\cdots$ ㉢

모든 x에 대하여 ㉡이 성립하려면

$D = (a + 3)^2 - 8(3 - a^2) \le 0,$

$(3a + 5)(a - 1) \le 0$

$\therefore\ -\frac{5}{3} \le a \le 1 \cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣의 공통범위를 구하면

$-\frac{5}{3} \le a \le -\frac{3}{5},\ a = 1$