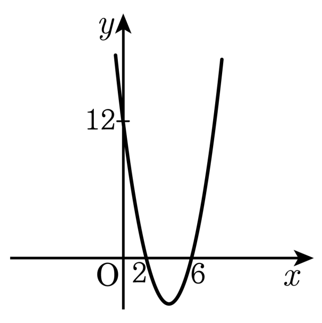
1. 다음은 이차함수 $y=(x-2)(x-6)$ 의 그래프이다.



이 이차함수가 x축과 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차방정식 $(x-2)(x-6)=0$ 에서 $x=2$ 또는 $x=6$
따라서 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(6,\ 0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=4$

2. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

3. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$
$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$
$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

4. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

5. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \Rightarrow x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \Rightarrow k+1=\pm4$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$

6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 두 점에서 만날 때, 자연수 k 의 개수는?

① 4 개　② 8 개　③ 10 개　④ 13 개　⑤ 15 개

해설

그래프가 x 축과 두 점에서 만나려면
$x^2 - 8x + k = 0$ 의 판별식이 0 보다 커야한다.
$\Rightarrow D' = 4^2 - k > 0$
$\Rightarrow k < 16$
$\therefore$ 자연수 k 의 개수 : 15 개

7. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$ 의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$ 의 그래프는 x축과 만나지 않는다. 이때, 정수 k 의 개수는?

① 5 개　② 6 개　③ 7 개　④ 8 개　⑤ 9 개

해설

이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$ 의 그래프는
x축과 만나므로
$x^2 + 2kx + 1 = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 할 때,
$\frac{D_1}{4} = k^2 - 1 \geq 0, \quad (k+1)(k-1) \geq 0$
$\therefore\ k \leq -1$ 또는 $k \geq 1 \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$ 의 그래프는
x축과 만나지 않으므로
$-x^2 + kx + 2k = 0$ 의 판별식을 D_2 라 할 때,
$D_2 = k^2 + 8k < 0, \quad k(k+8) < 0$
$\therefore\ -8 < k < 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-8 < k \leq -1$
따라서 정수 k 는 $-7,\ -6,\ \cdots,\ -2,\ -1$ 의 7 개이다.

8. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots ㉠$

$y = x + 1 \qquad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면

$x^2 + ax + a = x + 1$

$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$

㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면

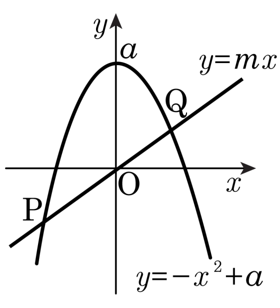
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$

$\therefore\ (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$

$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5

따라서 구하는 a의 값은 6

9. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2+a$의 그래프와 직선 $y=mx$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. 점 Q의 x좌표가 $\sqrt{5}-1$일 때, $a+m$의 값을 구하여라. (단, a , m 은 유리수)



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+a$ 와 $y=mx$ 가 만나는 두 점 P, Q 의 x 좌표는 방정식이 $-x^2+a=mx$ 의 근이다.
점 Q의 x 좌표가 $\sqrt{5}-1$이므로
방정식 $x^2+mx-a=0$의 한 근이 $\sqrt{5}-1$ 이다.
그런데 a 와 m 이 유리수이므로 다른 한 근은 $-\sqrt{5}-1$ 이다.
따라서, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$-m=\left(\sqrt{5}-1\right)+\left(-\sqrt{5}-1\right)=-2$
$-a=\left(\sqrt{5}-1\right)\left(-\sqrt{5}-1\right)=-4$
$\therefore a=4,\ m=2 \qquad \therefore a+m=6$

10. 이차함수$y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와
직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은
이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$\therefore\ 3a + b = -5 \cdots$ ㉠

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$\therefore a = -2$

㉠에서 $b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

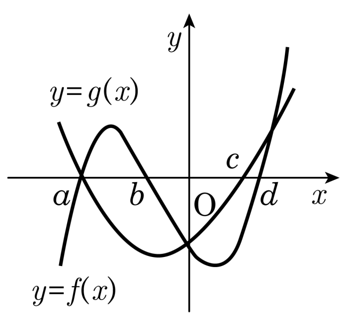
11. 직선 $y=2x+k$ 가 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이 두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

이차방정식 $2x+k=x^2$,
즉 $x^2-2x-k=0$ 의 두 근을 α,β 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-k$
두 그래프의 교점의 좌표를
$(\alpha,\ 2\alpha+k),\ (\beta,\ 2\beta+k)$ 라 하면
두 점 사이의 거리가 $2\sqrt{10}$ 이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta)^2}=2\sqrt{10}$ 에서
$\sqrt{5(\alpha-\beta)^2}=2\sqrt{10}$
$\therefore |\alpha-\beta|=2\sqrt{2}$
이때, $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$ 에서
$(2\sqrt{2})^2=2^2-4(-k),\ 8=4+4k$
$\therefore\ k=1$

12. 두 개의 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$를 만족하는 것을 고르면?



① a ② a, b ③ a, c

④ a, b, d ⑤ a, b, c, d

해설

$f(x)=0$, $g(x)=0$를 모두 만족하는 것은 a 이다.
($\because$ 실수 a, b 에 대하여 $a^2+b^2=0$ 이면
$a=0$ 이고 $b=0$ 이다.)