1. 어떤 자연수 n 에 대하여 $\frac{110}{2 \times n + 1}$ 이 자연수가 된다. 이러한 n 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 34

해설

110 의 약수를 구해보면 $1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110$ 이다.
그 중 홀수는 1, 5, 11, 55 이다.
$2 \times n + 1 = 1$ 에서 $\therefore\ n = 0$
$2 \times n + 1 = 5$ 에서 $\therefore\ n = 2$
$2 \times n + 1 = 11$ 에서 $\therefore\ n = 5$
$2 \times n + 1 = 55$ 에서 $\therefore\ n = 27$
따라서 자연수 n 의 합을 구하면 $2 + 5 + 27 = 34$

2. 567^{2009} 의 일의 자리의 숫자를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

567^{2009} 의 일의 자리만 거듭제곱하여 규칙을 찾는다.
$7^1 = 7$,
$7^2 = 49$,
$7^3 = 343$,
$7^4 = 2401$,
$7^5 = 16807$,
$7^6 = 117649$,
$\cdots$
7 을 거듭제곱할 때, 일의 자리의 숫자가 7, 9, 3, 1 의 네 개의 숫자가 반복된다.
567^{2009} 의 지수인 2009 를 4 로 나누면
$2009 \div 4 = 502 \cdots 1$ 이므로
567^{2009} 의 일의 자리의 숫자는 반복되는 네 개의 숫자 중 첫 번째 숫자인 7 이다.

3. 옛날부터 우리나라에는 십간(⊠⊠)과 십이지(⊠⊠⊠)를 이용하여 매 해에 이름을 붙였다. 십간과 십이지를 차례대로 짝지으면 다음과 같이 그 해의 이름을 만들 수 있다. 다음 표에서 알 수 있듯이 2010 년은 경인년이다. 다음 중 경인년이 <u>아닌</u> 해는?

병	정	무	기	경	신	임	계
자	축	인	묘	진	사	오	미
병자	정축	무인	기묘	경진	신사	임오	계미
1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003

갑	을	병	정	무	기	경
신	유	술	해	자	축	인
갑신	을유	병술	정해	무자	기축	경인
2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010

① 1830 년 ② 1890 년 ③ 1950 년

④ 2070 년 ⑤ 2110 년

해설

십간(⊠⊠)의 10 가지와 십이지(⊠⊠⊠)의 12 가지를 계속 돌아가면서 조합이 이루어지므로 같은 이름의 년도는 60 년 만에 한 번씩 돌아오게 된다. 따라서 2010 년이 경인년이면 1830 년, 1890 년, 1950 년, 2070 년도 경인년이다.

4. 옛날부터 우리나라에는 십간(⊠⊠)과 십이지(⊠⊠⊠)를 이용하여 매해에 이름을 붙였다. 십간과 십이지를 차례대로 짝지으면 다음과 같이 그 해의 이름을 만들 수 있다. 다음 표에서 알 수 있듯이 2011년은 신묘년이다. 다음 중 신묘년이 아닌 해는?

정	무	기	경	신	임	계	갑
축	인	묘	진	사	오	미	신
정축	무인	기묘	경진	신사	임오	계미	갑신
1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004

을	병	정	무	기	경	신
유	술	해	자	축	인	묘
을유	병술	정해	무자	기축	경인	신묘
2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011

① 1831년 ② 1881년 ③ 1951년
④ 2071년 ⑤ 2131년

해설

십간(⊠⊠)의 10가지와 십이지(⊠⊠⊠)의 12가지를 계속 돌아가면서 조합이 이루어지므로 같은 이름의 년도는 60년 만에 한 번씩 돌아오게 된다. 따라서 2011년이 신묘년이면 1831년, 1891년, 1951년, 2071년, 2131년도 신묘년이다.

5. 네 자리의 정수 41□2 가 3 의 배수인 동시에 4 의 배수가 되도록 □ 안에 알맞은 수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

3 의 배수는 자리 수의 합이 3 의배수 이므로 41□2 $\Rightarrow 4 + 1 + □ + 2 = 7 + □$ 에서 □ 안에 들어갈 수 있는 수는 2, 5, 8 이다.
4 의 배수는 마지막 두 자리가 4 의 배수이어야 하므로 41□2⇒□2 에서
□ 안에 들어갈 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9 이다.
따라서 동시에 만족하는 수는 5 이다.

6. $7^x = 343$ 을 만족하는 x 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$7^3 = 343$ 이다. 따라서 $x = 3$ 이다.

7. 민수는 15 층 아파트에서 살고 있는데, 엘리베이터가 자주 고장이 난다. 어느 날 엘리베이터 입구에 '약수의 개수가 1 개 또는 3 개 이상인 층에서만 섭니다.' 라는 문구가 적혀 있었을 때, 엘리베이터가 서는 층은 모두 몇 개인가?

① 5 개 ② 6 개 ③ 7 개 ④ 8 개 ⑤ 9 개

해설

약수의 개수가 1 개인 수는 1 뿐이다. 약수가 3 개 이상인 수는 합성수이므로 15 층 아래에 있는 합성수는 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15 로 8 개이다. 따라서 약수의 개수가 1 개 또는 3 개 이상인 수는 모두 9 개이다.

8. 자연수 180 을 소인수분해 하였을 때, 소인수들의 곱을 구하면?

① 15 ② 18 ③ 24 ④ 25 ⑤ 30

해설

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

소인수는 2, 3, 5 이므로 $2 \times 3 \times 5 = 30$

9. $2 \times n$ 이 어떤 자연수의 세제곱이고, $\frac{n}{5}$ 이 어떤 자연수의 제곱이 되는 자연수 n 중에서 가장 작은 것은?

① 100 ② 200 ③ 300 ④ 400 ⑤ 500

해설

가장 작은 자연수 n 에서 $2 \times n$ 이 세제곱이므로 n 은 적어도 2 가 두 번 곱해져 있고, $\frac{n}{5}$ 이 제곱이므로 n 은 5 가 세 번 곱해져 있다.

$\therefore n = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$

10. 45 에 어떤 자연수를 곱하여 어떤 수의 제곱이 되게 하려고 한다. 곱해야 할 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$45 = 3^2 \times 5$

따라서 제곱이 되려면 5 를 곱해야 한다.

11. T, S, L 은 $T \times S \times L = 715$ 을 만족하는 서로 다른 자연수이다. 이 때, $T + S + L$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 29

해설

$715 = 5 \times 11 \times 13$ 이고, 합의 최솟값을 구하므로, T, S, L 는 5, 11, 13 이 된다.

12. 자연수 a 의 약수의 개수를 $N(a)$ 로 나타낼 때 $N(600)\times N(a)=96$ 인 자연수 a 중에서 가장 작은 수를 구하면?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

$600=2^3\times3\times5^2$ 이므로 $N(600)=4\times2\times3=24$
$24\times N(a)=96$ $\therefore\ N(a)=4$
약수의 개수가 4 개인 가장 작은 자연수는
$6=2\times3$ 이다.

13. 504 의 약수의 개수와 $3^x \times 7^2 \times 13^y$ 의 약수의 개수가 같다고 한다. 이때, $x - y$ 의 값을 구하여라. (단, x, y 는 $x > y$ 인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ 이므로 약수의 개수가 같기 위해서는 $x = 3$, $y = 1$ 이어야 한다. ($\because$ $x > y$)

$\therefore$ $x - y = 3 - 1 = 2$

14. $18 \times A \times 7^2$ 의 약수의 개수가 36 이라고 한다. 가장 작은 A 의 값을 a , 두 번째로 작은 A 의 값을 b 라고 할 때, $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$2 \times 3^2 \times 7^2 \times A$
약수의 개수가 36 개이므로
A 가 될 수 있는 수는 2^2, 3^3, 7^3 이거나 2, 3, 7 이외의 소수이다.
따라서 가장 작은 값은 $2^2 = 4$,
두 번째로 작은 값은 5
$\therefore\ 5 - 4 = 1$

15. 다음 중 옳은 것은?

① 6 과 21 은 서로소이다.

② 3, 5, 7, 9 는 소수이다.

③ 가장 작은 소수는 1 이다.

④ 서로 다른 두 소수는 서로소이다.

⑤ 20 의 소인수는 3 개이다.

해설

① 6 과 21 의 최대공약수가 3 이므로 서로소가 아니다.
② $9 = 3^2$ 이므로 소수가 아니다.
③ 가장 작은 소수는 2 이다.
⑤ $20 = 2^2 \times 5$ 이므로 소인수는 2 개이다.

16. 24, 32 의 최대공약수는?

① 2^2 ② 3^2 ③ 2^3
④ $2^2 \times 3$ ⑤ 2×3

해설

$24 = 2^3 \times 3$, $32 = 2^5$ 이므로 최대공약수는 2^3

17. 다음 네 수 $2^a\times3^5\times7\times175$, $2^5\times3^b\times5^3\times7^2$, $2^6\times3^3\times5^c\times7^3$, $144\times75\times7^d$ 의 최대공약수가 $2^2\times7\times90$ 일 때, $(a+b+c)\times d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

최대공약수가 $2^2\times7\times90=2^3\times3^2\times5\times7$ 이고
주어진 각 수를 정리한 값이
$2^a\times3^5\times7\times175=2^a\times3^5\times5^2\times7^2$
$2^5\times3^b\times5^3\times7^2$
$2^6\times3^3\times5^c\times7^3$
$144\times75\times7^d=2^4\times3^3\times5^2\times7^d$ 이다.
주어진 네 수의 2 의 지수를 비교하면
모두 3 보다 크므로 a 는 3 이어야 한다.
주어진 네 수의 3 의 지수를 비교하면
모두 2 보다 크므로 b 는 2 이어야 한다.
주어진 네 수의 5 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 c 는 1 이어야 한다.
주어진 네 수의 7 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 d 는 1 이어야 한다.
따라서 $a=3,\ b=2,\ c=1,\ d=1$ 이므로
$(a+b+c)\times d=(3+2+1)\times1=6$ 이다.

18. 두 자연수 a, b 의 최대공약수는 24 이다. a, b, 32 의 공약수를 모두 구하면?

① 1 ② 1, 2 ③ 1, 2, 4
④ 1, 2, 4, 8 ⑤ 1, 2, 4, 8, 16

해설
a, b 의 공약수는 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 이다.
32 의 약수는 1, 2, 4, 8, 16, 32 이다.
따라서 두 수의 공약수는 1, 2, 4, 8 이다.

19. 체육대회 후에 문구류 종합세트를 만들어서 상품으로 나누어 주려고 한다. 볼펜 462 개, 지우개 693 개, 연필 1155 개, 공책 1848 권을 똑같이 나누어서 되도록 많은 개수의 상품세트를 만들려고 할 때, 상품세트는 최대 몇 개를 만들 수 있는가? 또, 상품세트에는 볼펜, 지우개, 연필, 공책이 각각 몇 개씩 들어가는지 구하여라.

① 상품세트 231 개, 볼펜 2 개, 지우개 4 개, 연필 5 개, 공책 6 권

② 상품세트 231 개, 볼펜 2 개, 지우개 3 개, 연필 5 개, 공책 8 권

③ 상품세트 221 개, 볼펜 3 개, 지우개 4 개, 연필 4 개, 공책 8 권

④ 상품세트 221 개, 볼펜 2 개, 지우개 4 개, 연필 5 개, 공책 6 권

⑤ 상품세트 221 개, 볼펜 3 개, 지우개 3 개, 연필 4 개, 공책 8 권

해설

상품세트의 개수는 462, 693, 1155, 1848 의 최대공약수이므로 231

볼펜의 개수 : $462 \div 231 = 2$ (자루)

지우개의 개수 : $693 \div 231 = 3$

연필의 개수 : $1155 \div 231 = 5$

공책의 개수 : $1848 \div 231 = 8$

20. 가로의 길이, 세로의 길이, 높이의 길이가 각각 45cm, 60cm, 90cm 인 상자 속에 정육면체 모양의 과자 상자가 빈틈없이 들어있다. 과자 상자가 가장 적을 때의 개수는?

① 180 개 ② 72 개 ③ 36 개
④ 24 개 ⑤ 15 개

해설
과자 상자가 가장 적을 때 과자 상자 한 모서리의 길이가 가장 크므로 상자 한 모서리의 길이는 45, 60, 90 의 최대공약수인 15cm 이다.
따라서 상자의 개수는
$(45 \div 15) \times (60 \div 15) \times (90 \div 15) = 72$ (개)

21. 몇 명의 학생들에게 바나나 45 개, 귤 56 개, 자두 77 개를 똑같이 나누어 줄 때, 바나나는 3 개가 모자라고, 귤과 자두는 각각 2 개, 5 개가 남는다. 이때, 학생 수는 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 6 명

해설

바나나 45 개를 나누면 3 개가 모자르다. : $(45+3)$ 개를 나누면 나누어 떨어진다.
귤 56 개를 나누면 2 개가 남는다. : $(56-2)$ 개를 나누면 나누어 떨어진다.
자두 77 개를 나누면 5 개가 남는다. : $(77-5)$ 개를 나누면 나누어 떨어진다.
이러한 수는 48, 54, 72 의 공약수이다. 그런데 77 개를 나누면 5 개가 남았으므로 학생 수는 5 명보다는 많아야 한다.
따라서 구하는 학생 수는 5 보다 큰 48, 54, 72 의 최대공약수는 6 이고 6 의 약수 중 5 보다 큰 수는 6 뿐이므로 학생 수는 6 명이다.

22. 다음 두 수 $2^a \times 3^3 \times 5^2$, $2^5 \times 3^2 \times 5^{a+1}$ 의 최소공배수가 $2^5 \times 3^3 \times 5^{a+1}$ 일 때, 다음 중 자연수 a 가 될 수 <u>없는</u> 것은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

2^a 와 2^5 의 최소공배수가 2^5 이므로 a 는 5 이하의 수가 되어야 한다.
또한 5^2 과 5^{a+1} 의 최소공배수가 5^{a+1} 이므로 $a+1$ 은 2 이상의 수가 되어, a 는 1 이상의 수가 된다.
따라서 두 조건을 모두 만족시키는 자연수는 1, 2, 3, 4, 5 이다.

23. 1000 이하의 자연수 중 $2^3 \times 3$과 2×3^2의 공배수의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$2^3 \times 3$ 과 2×3^2 의 최소공배수는 $2^3 \times 3^2 = 72$ 이다.

$\therefore\ 1000 \div 72 = 13 \cdots 64$

따라서 13 개이다.

24. 네 수 14, 42, 56, A 의 최소공배수가 336 일 때, A 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 336

해설

$14 = 2\times7,\ 42 = 2\times3\times7,\ 56 = 2^3\times7,\ 336 = 2^4\times3\times7$ 이므로, A 값이 될 수 있는 수는 $2^4\times3^x\times7^y$ (x, y는 0 또는 1)이며, 최댓값을 가질 때는 $x,\ y = 1$ 일 때이므로 A 의 최댓값은 336 이다.

25. A 와 B 가 함께 일자리를 구했다. A 는 4 일간 일하고 하루 쉬고, B 는 5 일간 일하고 이틀간 쉬기로 하였다. 이와 같이 180 일간 일한다면, 두 사람이 같이 쉬는 일수는?

① 5 일 ② 10 일 ③ 15 일 ④ 20 일 ⑤ 35 일

해설

5 와 7 의 최소공배수는 35 ,
35 일 동안 B 가 쉬는 날은 6, 7, 13, 14, 20, 21, 27, 28, 34, 35 일,
이 중에 A 가 쉬는 날은 20, 35 일
따라서 180 일 동안 두 사람이 함께 쉬는 날은
$2 \times 5 = 10$(일) 이다.

26. 서로 맞물려 도는 톱니바퀴 ㉠과 ㉡이 있다. ㉠의 톱니 수는 20, ㉡의 톱니 수는 15일 때, 이 톱니가 같은 이에서 다섯 번째로 다시 맞물리는 것은 ㉡이 몇 바퀴 돈 후인가?

① 16 바퀴　② 18 바퀴　③ 20 바퀴
④ 21 바퀴　⑤ 24 바퀴

해설

20 와 15 의 최소공배수는 60 이다.
같은 지점에 첫번째로 맞물릴 때까지 ㉡ 톱니바퀴는 $60 \div 15 = 4$ (바퀴) 회전하므로
다섯번째로 맞물릴때까지 바퀴 수는 $4 \times 5 = 20$ (바퀴) 이다.

27. 가로 $10\,\mathrm{cm}$, 세로 $18\,\mathrm{cm}$ 인 직사각형 모양의 타일로 한 변의 길이가 $1\,\mathrm{m}$ 보다 큰 정사각형을 만들 때, 최소한 몇 장의 타일이 필요한지 구하여라.

▶ 답: 장

▷ 정답: 180 장

해설

정사각형의 한 변의 길이는 10 과 18 의 공배수 중 세 자리의 가장 작은 자연수이다. 10 과 18 의 최소공배수는 90이고, 90 의 배수 중 세 자리의 가장 작은 수는 180이므로 정사각형의 한 변의 길이는 $180\,\mathrm{cm}$ 이다.
따라서 필요한 타일의 개수는 $(180 \div 10) \times (180 \div 18) = 18 \times 10 = 180$ (장) 이다.

28. 4 로 나누면 3 이 남고, 5 로 나누면 4 가 남고, 6 으로 나누면 5 가 남는 자연수 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 59

해설

4, 5, 6 으로 나누면 항상 1 이 부족하므로 구하는 수를 x 라 하면 $x+1$ 은 4, 5, 6 의 공배수이다.
4, 5, 6 의 최소공배수는 60 이므로 60 의 배수 중 가장 작은 수는 60 이다.
따라서 $x+1=60$ 이므로 $x=59$ 이다.

29. 세 자연수 $84,\ 126,\ A$ 의 최대공약수가 6 , 최소공배수가 1260 일 때, 가장 작은 자연수 A 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$84 = 2^2 \times 3 \times 7,\ 126 = 2 \times 3^2 \times 7,\ A$ 에서
최대공약수는 $6 = 2 \times 3$,
최소공배수는 $1260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 이므로
A 는 2×3 과 5 를 인수로 반드시 가져야 한다.
따라서, 가장 작은 자연수 $A = 2 \times 3 \times 5 = 30$ 이다.

30. 두 자연수 A, B 의 최대공약수가 5이고, $\frac{A}{B}=\frac{7}{8}$ 일 때, 두 자연수 A, B 의 최소공배수는?

① 280 ② 350 ③ 420 ④ 490 ⑤ 560

해설

A 와 B 의 최대공약수가 5 이고 $\frac{A}{B}=\frac{7}{8}$ 이므로, $A=35=5\times7$, $B=40=2^3\times5$ 이다.
따라서 A 와 B 의 최소공배수는 $2^3\times5\times7=280$ 이다.

31. 희정이는 1 과 100 사이의 자연수 중에서 $\frac{1}{3}$ 을 곱하여도, $\frac{1}{8}$ 을 곱하여도 항상 자연수가 되는 수가 모두 몇 개인가를 조사하려고 한다. 희정이가 찾은 자연수는 모두 몇 개인가?

① 3 개 ② 4 개 ③ 5 개 ④ 6 개 ⑤ 7 개

해설

구하는 수를 a 라 하면
$\frac{1}{3} \times a =$ (자연수) , $\frac{1}{8} \times a =$ (자연수) 가 되는 a 는 3 과 8 의 공배수이므로,
3 과 8 의 최소공배수는 24
따라서 24, 48, 72, 96 의 4 개

32. $\frac{8}{n}$, $\frac{24}{n}$, $\frac{36}{n}$ 을 자연수로 만드는 자연수 n 들을 모두 곱하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

n 은 8, 24, 36 의 공약수, 공약수는 최대공약수의 약수이므로
8, 24, 36 의 최대공약수는 4 이다.
4 의 약수는 1, 2, 4 이다.
따라서 8 이다.

33. 어떤 분수에 $\frac{20}{9}$, $\frac{25}{12}$ 의 어느 것을 곱하여도 그 결과는 자연수라고 한다. 이를 만족하는 분수 중 가장 작은 분수를 A 라 할 때, $A\times\frac{20}{9}$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

구하려는 분수를 $A=\frac{b}{a}$ 라고 하자.

$\frac{20}{9}\times\frac{b}{a}=(\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b\text{는 } 9\text{의 배수} \\ a\text{는 } 20\text{의 약수} \end{cases}$

$\frac{25}{12}\times\frac{b}{a}=(\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b\text{는 } 12\text{의 배수} \\ a\text{는 } 25\text{의 약수} \end{cases}$

즉, $\frac{b}{a}=\frac{(9,\ 12\text{의 공배수})}{(20,\ 25\text{의 공약수})}\cdots$㉠ 이다.

㉠을 만족하는 가장 작은 분수

$\frac{b}{a}=\frac{(9,\ 12\text{의 최소공배수})}{(20,\ 25\text{의 최대공약수})}$

$\therefore A=\frac{b}{a}=\frac{36}{5}$

따라서 $A\times\frac{20}{9}=\frac{36}{5}\times\frac{20}{9}=4\times4=16$ 이다.