1. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이
허근을 가지려면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$
$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$
$-2k+2<0,\ k>1$
$\therefore\ m=1$

2. 이차방정식 $x^2 + 2(k - a)x + k^2 + a^2 + b - 2 = 0$이 실수 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a + b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{D}{4} = (k - a)^2 - (k^2 + a^2 + b - 2) = 0$

$\therefore\ -2ka - b + 2 = 0$

이 식은 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

k에 대한 항등식이다.

$a = 0,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 2$

3. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$가 x에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면
이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$
이 중근을 갖는다.
따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$
위의 식을 정리하면
$-k^2 + 4k - 3 = 0$
$k^2 - 4k + 3 = 0$
$(k-1)(k-3) = 0$에서
$k = 1$ 또는 $k = 3$

4. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

5. 방정식 $x^2 + |x| = |x-1| + 5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$　② $-\sqrt{6}$　③ 0
④ $\sqrt{6}$　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x < 0$일 때
$x^2 - x = -(x-1) + 5,\ x^2 = 6$
$\therefore x = \pm\sqrt{6}$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -\sqrt{6}$
ⅱ) $0 \le x < 1$일 때
$x^2 + x = -(x-1) + 5$
$x^2 + 2x - 6 = 0$
$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$
그런데 $0 \le x < 1$이므로 해가 없다.
ⅲ) $x \ge 1$일 때,
$x^2 + x = x - 1 + 5,\ x^2 = 4$
$\therefore x = \pm 2$
그런데 $x \ge 1$이므로 $x = 2$
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는
$x = 2$ 또는 $x = -\sqrt{6}$이므로
두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

6. 방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0\ (0 < x < 4)$ 의 모든 근의 합은?

① $2\sqrt{6}$　② $\sqrt{10}$　③ 3　④ $\sqrt{7}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

이차방정식 $x^2 - [x] - 4 = 0$ 에서
(ⅰ) $0 < x < 1$ 일 때, $[x] = 0$ 이므로
$x^2 - 4 = 0, (x+2)(x-2) = 0$
$\therefore x = -2$ 또는 $x = 2$
그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 없다.
(ⅱ) $1 \le x < 2$ 일 때, $[x] = 1$ 이므로
$x^2 - 5 = 0,\ (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}) = 0$
$\therefore x = -\sqrt{5}$ 또는 $x = \sqrt{5}$
그런데 $1 \le x < 2$ 이므로 해가 없다.
(ⅲ) $2 \le x < 3$ 일 때, $[x] = 2$ 이므로
$x^2 - 6 = 0,\ (x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6}) = 0$
$\therefore x = -\sqrt{6}$ 또는 $x = \sqrt{6}$
그런데 $2 \le x < 3$ 이므로 $x = \sqrt{6}$
(ⅳ) $3 \le x < 4$ 일 때, $[x] = 3$ 이므로
$x^2 - 7 = 0,\ (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7}) = 0$
$\therefore x = -\sqrt{7}$ 또는 $x = \sqrt{7}$
그런데 $3 \le x < 4$ 이므로 해가 없다.
따라서 모든 근의 합은 $\sqrt{6}$

7. $x^2+ax+b=0,\ x^2+2bx+3a=0$를 동시에 만족하는 x는 -1밖에 없을 때, 상수 ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$x=-1$은 두 이차방정식 $x^2+ax=b=0$,
$x^2+2bx+3a=0$의 공통근이므로
$1-a+b=0,\ 1-2b+3a=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3,\ b=-4$
$\therefore ab=12$

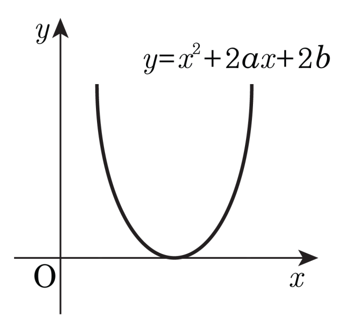
8. 이차방정식 $x^2 + 2(k-11)x - k + 3 = 0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 k의 개수는?

① 5개　② 6개　③ 7개　④ 8개　⑤ 9개

해설

두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha\beta = -k + 3 < 0$, $\alpha + \beta = -2(k-11) > 0$
$\therefore\ \ 3 < k < 11$

9. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b - 1)^2 - 1 < 0$

∴ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

10. 이차식 $x^2-xy-2y^2-ax-3y-1$ 이 $x,\ y$ 에 관한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되는 모든 상수 a 의 값의 합은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

(주어진 식)$=0$이라 놓고 x에 관하여 정리하면

$x^2-(a+y)x-(2y^2+3y+1)=0$

근의 공식에서

$$x=\frac{a+y\pm\sqrt{(a+y)^2+4(2y^2+3y+1)}}{2}$$

$$=\frac{a+y\pm\sqrt{9y^2+2(a+6)y+a^2+4}}{2}$$

주어진 식이 $x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되려면 근호 안의 식$(=D)$ 이 완전제곱 꼴이어야 한다.

$D=9y^2+2(a+6)y+a^2+4$의 판별식이 0 이 되어야 하므로

$$\frac{D'}{4}=(a+6)^2-9(a^2+4)=-8a^2+12a=0$$

$\therefore\ a=0$ 또는 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ 0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

11. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1　　② -3 또는 2　　③ -2 또는 3

④ -1 또는 4　　⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = q \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha^2 + \beta^2 = 3p,\ \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$\therefore\ 3p = p^2 - 2q \cdots\cdots$ ㉢

$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$

$\therefore\ 4(q-1) = q^2 \cdots\cdots$ ㉣

㉣에서 $q^2 - 4q + 4 = 0,\ (q-2)^2 = 0$

$\therefore\ q = 2$

㉢에 대입하여 정리하면,

$p^2 - 3p - 4 = 0,\ (p+1)(p-4) = 0$

$\therefore\ p = -1,\ 4$

12. α,β를 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$(단, $ac \neq 0$) 의 두 근이라 할 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2+(b^2-4ac)x+c^2=0$

② $a^2x^2-(b^2-2ac)x-c^2=0$

③ $c^2x^2+(b^2-4ac)x+a^2=0$

④ $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$

⑤ $c^2x^2+(b^2-2ac)x+a^2=0$

해설

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\beta}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{b^2-2ac^{2}}{c^2}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\beta}\right)^2=\frac{1}{(\alpha\beta)^2}=\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}=\frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2-\frac{(b^2-2ac)}{c^2}x+\frac{a^2}{c^2}=0$$

즉, $c^2x^2-(b^2-2ac)x+a^2=0$

13. 방정식 $|x^2 + (a-2)x - 2| = 1$ 의 모든 근의 합이 0 일 때 상수 a 의 값은?

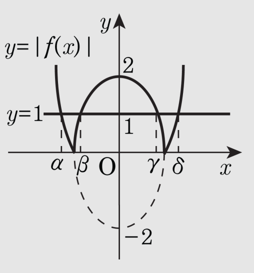
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$|x^2 + (a-2)x - 2| = 1 \Leftrightarrow x^2 + (a-2)x - 2 = \pm 1$
$x^2 + (a-2)x - 2 = 1$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = -(a-2)$
… ㉠
$x^2 + (a-2)x - 2 = -1$ 의 두 근을 γ, δ 라 하면 $\gamma + \delta = -(a-2)$
… ㉡
㉠+㉡하면 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2(a-2)$
모든 근의 합이 0 이므로 $a - 2 = 0 \therefore a = 2$

해설

$f(x) = x^2 + (a-2)x - 2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)| = 1$ 의 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 할 때 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ 이기 위해서는$y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a - 2 = 0,\ a = 2$

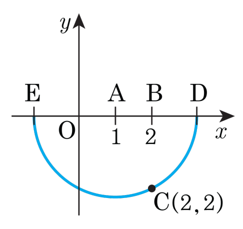
14. x에 관한 이차방정식 $x^2+nx+p=0$의 두 근을 α,β라 하고, $x^2+nx+q=0$의 두 근을 γ,δ라 할 때, $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$를 p,q로 나타내면?

① $(p+q)^2$　② $(2p+q)^2$　③ $(p-2q)^2$
④ $(p-q)^2$　⑤ $(2p-3q)^2$

해설

근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-n,\ \alpha\beta=p,\ \gamma+\delta=-n,\ \gamma\delta=q$이므로
주어진 식 $=\{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)\}\{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)\}$
$=\{\gamma^2-(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta\}\{\delta^2-(\alpha+\beta)\delta+\alpha\beta\}$
$=(\gamma^2+n\gamma+p)(\delta^2+n\delta+p)$
그런데, $\gamma^2+n\gamma+q=0$에서
$\gamma^2+n\gamma+p=p-q$
또, $\delta^2+n\delta+q=0$에서
$\delta^2+n\delta+p=p-q$
따라서, 주어진 식$=(p-q)^2$

15. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



① A　　② B　　③ C

④ D　　⑤ O

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$이므로

$\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5}$ 이다.

$\therefore$ 점 D 의 좌표는 $(1 + \sqrt{5},\ 0)$,

점 E 의 좌표는 $(1 - \sqrt{5},\ 0)$ 이다.

그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ 의 그래프가 점 E를 지나므로

$x = 1 - \sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.

여기서, $a,\ b,\ c$ 가 유리수이므로 $x = 1 + \sqrt{5}$

($\because$ 켤레근) 또한 방정식의 근이 된다.

따라서, 그래프는 점 D$(1 + \sqrt{5},\ 0)$ 을 지난다.