1. $\frac{1}{45}, \frac{2}{45}, \frac{3}{45}, \dots, \frac{199}{45}, \frac{200}{45}$ 중에서 유한소수이면서, 정수가 아닌 유리수의 개수는?

- ① 4개 ② 18개 ③ 22개 ④ 62개 ⑤ 66개

해설

$\frac{n}{45} = \frac{n}{3^2 \times 5}$ 이 유한소수가 되게 하는 n 은 9의 배수이므로 22개, 이때 정수가 되게 하는 n 은 45의 배수로 4개이다. 따라서 $22 - 4 = 18$ 개이다.

2. $\frac{2}{125}$ 를 유한소수로 나타내기 위하여 $\frac{a}{10^n}$ 의 꼴로 고칠 때, $a+n$ 의 최솟값을 구하여라. (단, a, n 은 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 19

해설

$$\frac{2}{125} = \frac{2}{5^3} \text{의 분자, 분모에 } 2^3 \text{ 을 곱하면 } \frac{2^4}{2^3 \times 5^3} = \frac{16}{10^3}$$

$\therefore a = 16, n = 3$
 $\therefore a + n = 16 + 3 = 19$

3. 유리수 $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \dots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$ 중에서 유한소수는 모두 몇 개인가?

- ① 8개 ② 9개 ③ 10개 ④ 11개 ⑤ 12개

해설

분모가 2의 거듭제곱으로만 $2^4, 2^5, 2^6$

분모가 5의 거듭제곱으로만 5^2

2와 5의 거듭제곱으로만 $2 \times 5, 2^2 \times 5, 2^3 \times 5, 2^4 \times 5, 2 \times 5^2, 2^2 \times 5^2$

$\therefore$ 10개

6. 무한소수 $\frac{7}{110}$ 과 $\frac{1}{35}$ 에 자연수 a 를 곱했더니 모두 유한소수가 되었다. 이러한 a 값 중 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 77

해설

$\frac{7}{110} \times a = \frac{7}{2 \times 5 \times 11} \times a$ 가 유한소수가 되려면 a 는 11의 배수.
 $\frac{1}{35} \times a = \frac{1}{5 \times 7} \times a$ 가 유한소수가 되려면 a 는 7의 배수이어야 한다.
따라서 a 는 77의 배수이므로 가장 작은 자연수 a 는 $a = 77$ 이다.

7. $\frac{1}{2 \times 5^2 \times x}$ 가 유한소수로 나타내어진다고 한다. 이때, x 가 될 수 있는 수는 모두 몇 개인지 구하여라. (단, x 는 1이상 30이하인 자연수)

▶ 답: 개

▷ 정답: 9 개

해설

분모의 소인수가 2나 5뿐이면 유한소수로 나타낼 수 있다.
따라서 x 에 들어갈 숫자는
 $1, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 5^1, 5^2, 2^1 \times 5^1, 2^2 \times 5^1$ 으로 총 9개이다.

8. 분수 $\frac{21}{2^3 \times x \times 5}$ 을 소수로 나타내면 순환소수가 된다고 한다.
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중 x 가 될 수 있는 것을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

x 가 2, 4, 8, 5 이면 유한소수

x 가 3이면 $\frac{7}{2^3 \times 5}$, 7 이면 $\frac{3}{2^3 \times 5}$ 가 되어 유한소수

x 가 6 이면 $\frac{3 \times 7}{2^3 \times 2 \times 3 \times 5} = \frac{7}{2^3 \times 2 \times 5}$ 로 유한소수

순환소수가 되려면 $x = 9$

9. $x = \frac{a}{70}$ (a 는 100 이하의 자연수)일 때, x 가 정수가 아닌 유한소수가 되는 a 의 값의 개수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

분수 $\frac{a}{70}$ 가 정수가 아닌 유한소수가 되는 a 는 100 이하의 7의 배수이고 70의 배수가 아니어야 하므로 $14 - 1 = 13$

10. 분수 $\frac{a}{150}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 나타내면 $\frac{3}{b}$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값은? (단, $10 < a < 20$)

- ① 34 ② 43 ③ 48 ④ 55 ⑤ 59

해설

$$\frac{a}{150} = \frac{a}{2 \times 3 \times 5^2} = \frac{3}{b}$$

a 는 3^2 을 가져야 하고, $10 < a < 20$ 이어야 하므로

$$a = 3^2 \times 2 = 18, b = 25$$

$$\therefore a + b = 18 + 25 = 43$$

11. 자연수 A, B 가 다음 식을 만족할 때, A, B 를 동시에 만족하는 값을 구하여 $A + B$ 의 최솟값을 구하여라.

$$\frac{1}{60} \times A = \frac{1}{B} \quad (\text{단, } \frac{1}{B} \text{ 은 유한소수})$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\frac{1}{60} \times A$ 가 유한소수이려면

A 는 3의 배수이어야 하고 $\frac{1}{60} = \frac{1}{AB}$, $AB = 60$ 이므로

(A, B) 를 구하면 $(3, 20), (6, 10), (12, 5), (15, 4)$ 이다.

따라서 $A + B$ 의 최솟값은 16이다.

12. $\frac{a}{450}$ 를 소수로 나타내면 유한소수가 되고, 기약분수로 나타내면 $\frac{A}{B}$ 라고 할 때, 다음과 같은 조건을 만족할 때, $A + B$ 의 값을 구하여라.

- i) $11 \leq a \leq 55$, a 는 정수
ii) A 는 3의 배수
iii) B 는 2의 배수

▶ 답:

▷ 정답: 53

해설

i) $\frac{a}{450} = \frac{a}{2 \times 3^2 \times 5^2}$ 가 유한소수이므로 a 는 9의 배수이고,
 $11 \leq a \leq 55$ 를 만족하는 a 의 값은 18, 27, 36, 45, 54이다.

ii) $a = 18$ 이면 $\frac{2 \times 3^2}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{1}{25}$

$a = 27$ 이면 $\frac{3^3}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{3}{50}$

$a = 36$ 이면 $\frac{2^2 \times 3^2}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{2}{25}$

$a = 45$ 이면 $\frac{3^2 \times 5}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{1}{10}$

$a = 54$ 이면 $\frac{2 \times 3^3}{2 \times 3^2 \times 5^2} = \frac{3}{25}$

기약분수로 나타낸 $\frac{A}{B}$ 에서 A 가 3의 배수, B 가 2의 배수를 만족

하는 a 의 값은 27이다.

$\therefore A + B = 50 + 3 = 53$

13. $\frac{a}{450}$ 를 소수로 나타내면 유한소수이고, 기약분수로 고치면 $\frac{7}{b}$ 이다.
 a 가 두 자리의 자연수일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 113

해설

$\frac{a}{450} = \frac{a}{2 \times 3^2 \times 5^2}$ 가 유한소수이려면 a 는 9 의 배수이어야

하고, 기약분수로 고치면 $\frac{7}{b}$ 이므로 a 는 7 의 배수이다.

따라서 a 는 $3^2 \times 7 \times n$ 인 두 자리의 자연수이므로 63 이다.

$\frac{63}{450} = \frac{7}{50}$ 이므로 $b = 50$ 이다.

따라서 $a+b = 113$ 이다.

14. 경식은 다음 계산을 하기 위해 계산기를 사용하고 있다. 마지막 = 버튼을 눌렀을 때, 계산기 화면에 소수점 아래의 어떤 자리부터 일정한 숫자의 배열이 계속 되풀이 되는 것은?

① $4 \div 25$

② $3 \div 18$

③ $11 \div 50$

④ $7 \div 4$

⑤ $21 \div 14$

해설

② $3 \div 18 = 0.16666\dots$ 이므로 순환마디가 6 인 순환소수가 되어 일정한 숫자의 배열이 계속 되풀이 된다.

15. 양의 기약분수 $\frac{a}{b}$ 에 대하여 $\frac{a}{b} = 3.\dot{x} = \frac{99}{10y+z}$ 일 때, $x+y+z$ 의 값을 구하여라.

(단, x, y, z 는 한 자리 자연수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$$\frac{a}{b} = 3.\dot{x} = \frac{30+x-3}{9} = \frac{27+x}{9}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{27+x}{9} = \frac{99}{10y+z} \text{ 에서 } x \text{ 가 한 자리의 자연수이므로}$$

$$\frac{(27+x) \times 3}{9 \times 3} = \frac{81+3x}{27} = \frac{99}{10y+z}, \quad 81+3x=99$$

$$\therefore x=6$$

$$10y+z=27$$

$$\therefore y=2, z=7$$

$$x+y+z=6+2+7=15$$

16. 자연수 a, b 에 대하여 $a + b > 0$, $ab > 0$ 이고 a, b 는 서로소이다. 이러한 조건을 만족시키는 a, b 에 대하여 $\frac{a}{b} = 4.\dot{x} = \frac{120}{9y+z}$ 일 때, $x + 2y + 3z$ 의 값을 구하여라.(단, x, y, z 는 한자리 자연수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 35

해설

$$\frac{a}{b} = 4.\dot{x} = \frac{36+x}{9}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{36+x}{9} = \frac{120}{9y+z} \text{ 에서 } x \text{ 가 한 자리의 자연수이므로}$$

$$\frac{(36+x) \times 3}{9 \times 3} = \frac{108+3x}{27} = \frac{120}{9y+z}$$

$$108+3x = 120$$

$$\therefore x = 4$$

$$9y+z = 27$$

$$\therefore y = 2, z = 9$$

$$x + 2y + 3z = 4 + 4 + 27 = 35$$

17. 분수 $\frac{6}{7}$ 을 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 20번째 자리의 수를 a , 99번째 자리의 수를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$\frac{6}{7} = 0.857142$ 이므로 순환마디의 숫자 6개

$20 = 6 \times 3 + 2$ 이므로 $a = 5$

$99 = 6 \times 16 + 3$ 이므로 $b = 7$

$\therefore a + b = 12$

18. 분수 $\frac{2}{7}$ 의 소수 n 번째 자리의 수를 X_n 이라 할 때, $X_1 + X_2 + \dots + X_{50}$ 의 값은?

- ① 218 ② 226 ③ 231 ④ 238 ⑤ 239

해설

$\frac{2}{7} = 0.285714285 \dots = 0.\dot{2}85714$ 이므로 순환마디의 숫자 6개
 $50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로
 $X_1 + X_2 + \dots + X_{50} = (2 + 8 + 5 + 7 + 1 + 4) \times 8 + (2 + 8) = 226$

19. $\frac{20}{7}$ 를 소수로 나타낼 때, 소수 20 번째 자리의 숫자와 소수 30 번째 자리의 숫자의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$\frac{20}{7} = 2.857142857142\cdots$ 이므로 6개의 숫자가 반복된다. $20 = 6 \times 3 + 2$ 이므로 20 번째 자리의 숫자는 5 이고 $30 = 6 \times 5 + 0$ 이므로 30 번째 자리의 숫자는 2 이다. 따라서 합은 7 이다.

20. 분수 $\frac{53}{11}$ 을 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 27 번째 자리의 숫자는?

- ① 2 ② 4 ③ 5 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\frac{53}{11} = 4.818181\dots$$

$27 \div 2 = 13 \dots 1$ 이므로 소수점 아래 27 번째 자리의 수는 8 이다

21. $x = 0.1$ 일 때, $1 + \frac{1}{1+x}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{11}{10}$

해설

$$x = \frac{1}{9}, \frac{1}{x} = 9$$

$$(\text{준식}) = 1 + \frac{1}{1+9} = \frac{11}{10}$$

22. $x = \frac{4}{7}$ 일 때, $10^6x - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 571428

해설

$x = \frac{4}{7} = 0.571428571428 \dots$ 이고
 $10^6x = 571428.571428 \dots$ 이므로
 $10^6x - x = 571428$ 이다.

23. $0.15\bar{8} = a \times 0.00\bar{1}$, $0.0\bar{5} = 5 \times b$ 일 때, ab 를 분수로 나타내어라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{143}{90}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{158 - 15}{900} &= a \times \frac{1}{900}, \quad a = 143 \\ \frac{5}{90} &= 5 \times b, \quad b = \frac{1}{90} \\ \therefore ab &= \frac{143}{90}\end{aligned}$$

24. 순환소수 $0.\dot{a}b$ 가 $\frac{13}{33}$ 일 때, 순환소수 $0.\dot{b}a$ 를 기약분수로 나타내어라.

(단, a, b 는 한 자리의 자연수)

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{31}{33}$

해설

$$0.\dot{a}b = \frac{10a + b}{99} = \frac{13}{33}$$

$$\therefore 10a + b = 39 \dots \textcircled{1}$$

a, b 는 한 자리의 자연수이므로 $a = 3, b = 9$

$$\therefore 0.\dot{b}a = 0.\dot{9}3 = \frac{93}{99} = \frac{31}{33}$$

25. 다음 부등식을 만족하는 한 자리의 자연수 a 의 값을 모두 더하여라.

$$\frac{1}{6} < (0.\dot{a})^2 < \frac{5}{9}$$

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$$\frac{1}{6} < \left(\frac{a}{9}\right)^2 < \frac{5}{9}$$

$$\frac{27}{162} < \frac{2a^2}{162} < \frac{90}{162}$$

따라서 $27 < 2a^2 < 90$,

$\frac{27}{2} < a^2 < 45$ 이므로 $a = 4, 5, 6$ 이다.

따라서 a 의 값을 모두 더하면 $4 + 5 + 6 = 15$ 이다.

26. $0.\dot{2} < 0.a < 0.5\dot{8}$ 을 만족하는 a 를 모두 구하여라. (단 a 는 한 자리 자연수)

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 4

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{aligned} \frac{2}{9} < \frac{a}{9} < \frac{53}{90} \\ 2 < a < \frac{53}{10} \\ 2 < a < 5.3 \end{aligned}$$

27. $\frac{1}{250} < 0.\dot{a}bc\dot{0} - 0.ab\dot{0}c < \frac{1}{200}$ 를 만족하는 한 자리 자연수 c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$0.\dot{a}bc\dot{0} - 0.ab\dot{0}c = \frac{1000a + 100b + 10c - a}{9990}$$

$$\frac{1000a + 100b + c - a}{9990} = \frac{9c}{9990} = \frac{c}{1110} \text{ 이므로}$$

$$\frac{1}{250} < \frac{c}{1110} < \frac{1}{200}$$

$4.44 < c < 5.55$ 를 만족하는 한 자리 자연수 c 는 5 이다.

28. x 에 대한 일차방정식 $14x + 1 = a$ 의 해를 소수로 나타내면 1보다 작은 유한소수가 된다고 한다. 이때, 자연수 a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$14x + 1 = a, \quad x = \frac{a-1}{14} = \frac{a-1}{2 \times 7}$$

유한소수가 되려면 $a-1$ 은 14보다 작은 7의 배수

$$\therefore a = 8$$

29. $0.4 + 2\left\{\frac{1}{2} + \left(0.2 - \frac{4}{9}\right)\right\} - 0.9$ 를 계산하여라.

- ① 0 ② 0.i ③ 0.i2 ④ 0.4 ⑤ 0.89

해설

$$\frac{4}{9} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9}\right) - 1 = \frac{4}{9} + 1 - \frac{4}{9} - 1 = 0$$

30. 순환소수 $1.\dot{4}$ 를 a 라 하고 $0.2\dot{8}$ 의 역수를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$1.\dot{4} = \frac{13}{9} = a, 0.2\dot{8} = \frac{26}{90}, b = \frac{90}{26}$$

$$\therefore ab = \frac{13}{9} \times \frac{90}{26} = 5$$

32. $x = \frac{k}{24}$ (단, x 는 자연수가 아니고, k 는 100 이하의 자연수)일 때, x 가 유한소수가 되기 위한 k 의 값의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$\frac{k}{24} = \frac{k}{2^3 \times 3}$: 유한소수이려면 k 는 3의 배수
따라서, $33 - 4 = 29$

33. $x = \frac{a}{90}$ (a 는 100 이하의 자연수)일 때, x 가 정수가 아니면서 유한소수가 되는 a 의 값의 개수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

분수 $\frac{a}{90}$ 가 정수가 아닌 유한소수가 되는 a 는 100 이하의 9의 배수 중 90의 배수를 제외하면 된다.
따라서, $11 - 1 = 10$