1. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$ ② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$ ④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$
⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설
$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

2. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

① $\varnothing$　② $\{0,\ 1\}$　③ $\{3,\ 4,\ 5\}$　④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$　⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에 $x = 0$을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

3. 명제「$x = 1$ 이면 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 이다.」의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 대우

해설

주어진 명제가 참이므로 대우가 참이고, 역은 거짓이므로 이도 거짓이다.
(역의 반례 : $x = -5$)

4. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$A = 3x^2 - xy + 2y^2$
$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$

① $A < B$ ② $A \leq B$ ③ $A > B$

④ $A \geq B$ ⑤ $A = B$

해설

$A - B = 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2)$
$= x^2 - 4xy + 5y^2$
$= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2$
$= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

5. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)
p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.
$\therefore\ f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

6. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow \ xy = 0$ (참)

7. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \rightarrow q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7 ② -6 ③ -5 ④ -4 ⑤ -3

해설

$p \rightarrow q$는 $\sim q \rightarrow \sim p$와 동치임을 이용
$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,
$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.
1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \leq -1$
2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \rightarrow\ a \geq -5$
$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$
따라서, $-5 + (-1) = -6$

8. 다음 두 진술이 모두 참이라 할 때 다음 중 옳은 것은?

㉠ 수학을 잘하는 학생은 머리가 좋다.
㉡ 수학을 잘하는 학생은 물리 또는 컴퓨터를 잘한다.

① 수학을 잘하는 학생은 물리를 잘한다.
② 컴퓨터를 잘하는 학생은 머리가 좋다.
③ 머리가 좋은 학생은 물리를 잘 한다.
④ 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.
⑤ 물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.

해설

p : 수학을 잘하는 학생, q : 머리가 좋다, r : 물리 또는 컴퓨터를 잘 한다. $p \Rightarrow q$, $p \Rightarrow r$에서 대우명제도 참이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$에서 '머리가 좋지 않은 학생은 수학을 잘 못한다.' $\sim r \Rightarrow \sim p$에서 '물리와 컴퓨터를 잘 못하는 학생은 수학을 잘 못한다.'

9. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q$ ∴ $P \subset Q$이므로 $P \subset Q$

∴ q 는 p 이기 위한 필요조건

10. $a>0$ 일 때, $x=\sqrt{a^2+1}$과 $y=a+\frac{1}{2a}$ 의 대소를 비교한 것으로 옳은 것은?

① $x \le y$ ② $x<y$ ③ $x \ge y$ ④ $x>y$ ⑤ $x=y$

해설

$x^2=a^2+1$

$y^2=\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2=a^2+1+\frac{1}{4a^2}$,

$\frac{1}{4a^2}>0$이므로 $y^2>x^2$

$\therefore y>x$

11. 부등식 $2^{50} > 5^{10n}$ 을 만족하는 자연수 n 의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$$\frac{2^{50}}{50^{10n}} = \frac{(2^5)^{10}}{(5^n)^{10}} = \left(\frac{32}{5^n}\right)^{10}$$

이 때 $2^{50} > 5^{10n}$이므로 $\left(\frac{32}{5^n}\right) > 1$

$\therefore n = 1,\ 2$

n의 갯수는 2 개이다.

12. 세 조건 p, q, r을 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 이라 하면 $P \cap Q = P$, $Q \cup R = R$ 이 성립한다. 이 때, 다음 중 항상 참인 명제는?

① $\sim p \to \sim q$　② $q \to p$　③ $q \to \sim r$
④ $\sim r \to \sim p$　⑤ $\sim p \to \sim r$

해설

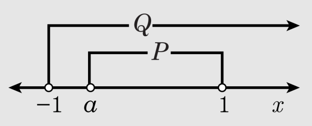
$P \cap Q = P$ 이면 $P \subset Q$
$Q \cup R = R$ 이면 $Q \subset R$
$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로 $p \Rightarrow r$ 이다.
$\therefore$ 대우 : $\sim r \to \sim p$ 도 참이다.

13. 실수 x에 대하여 두 조건 $p\ :\ a \le x \le 1,\ q\ :\ x \ge -1$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$를 참이 되게 하는 상수 a 의 범위는?

① $a > 1$　　② $a \le 1$　　③ $-1 \le a \le 1$
④ $a \ge -1$　　⑤ $a \le -1$

해설

조건 $p,\ q$ 의 진리집합을 각각 $P,\ Q$라 하자.
(i) $a > 1$일 때, $P = \varnothing$ 이므로 $P \subset Q$ $\therefore\ a > 1$
(ii) $a \le 1$ 일 때, 수직선에 나타내면



$\therefore\ -1 \le a \le 1$
(i), (ii)에서 $a \ge -1$

14. 다음은 'x, y 가 자연수일 때, xy 가 짝수이면 x 또는 y 가 짝수이다.' 를 증명하는 과정이다.(가), (나), (다) 에 들어갈 말로 알맞게 짝지어진 것은?

> 주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 (가) 이면 xy 도 (가) 이다.' 이다.
> $x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면
> $xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 (나) 가 된다.
> 따라서, 대우가 (다) 이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① 짝수, 홀수, 참
② 짝수, 짝수, 참
③ 짝수, 짝수, 거짓
④ 홀수, 홀수, 참
⑤ 홀수, 홀수, 거짓

해설

주어진 명제의 대우는 '자연수 x, y 에 대하여 x 와 y 가 홀수이면 xy 도 홀수이다.' 이다.
$x = 2a - 1$, $y = 2b - 1$ (a, b 는 자연수) 라 하면
$xy = (2a-1)(2b-1) = 2(2ab - a - b) + 1$ 이므로 xy 는 홀수가 된다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

15. 세 집합 $A=\{x|-3 \le x \le 6\}$, $B=\{x \mid x \le a\}$, $C=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2} \le x \le b\right\}$ 에 대하여, A 는 C 이기 위한 필요조건이고, A 는 B 이기위한 충분조건일 때, a 의 최솟값을 M, b 의 최댓값을 n 라고 하면 $2M-n^2$ 의 값은?

① -24 ② -12 ③ 0 ④ 12 ⑤ 24

해설

ⅰ) $C \subset A$ 조건에 만족하려면 $b \le 6$
$\therefore b$ 의 최댓값, $n=6$
ⅱ) $A \subset B$ 조건에 만족하려면 $a \ge 6$
$\therefore a$ 의 최솟값, $M=6 \Rightarrow 2M-n^2=-24$

16. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$　　② $P - Q = \varnothing$　　③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$　　⑤ $P \cap Q = P$

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \varnothing$

17. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례를 모두 구할 때, 그 개수는?

n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 9 개

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 경우가 반례가 된다.
n^2 이 12의 배수가 되지만 n 은 12의 배수가 되지 않아야 하므로 $n = 2 \times 3 \times$ (홀수) 의 형태가 되어야 한다. 이에 따라 구해보면 $n = 2 \times 3 \times 1,\ 2 \times 3 \times 3,\ \cdots, 2 \times 3 \times 15$
$\therefore n = 6, 18, 30, 42, 54, 66, 78, 90$ (8 개)

18. 민우는 한 변의 길이가 1인 정육면체 모양의 어항에 28마리의 금붕어를 기르고 있다. 인접한 두 금붕어 사이의 거리에 대한 다음 설명 중 항상 옳은 것은?

① $\sqrt{3}$

② $\frac{\sqrt{3}}{2}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다.

④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이상인 것이 반드시 있다.

⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하이다.

해설

'비둘기집의 원리'를 이용한다. 정육면체 가로, 세로, 높이를 각각 3등분 한다. 그러면 $3\times3\times3 = 27$개의 정육면체 공간이 생긴다. 여기에 금붕어를 한 마리씩 넣으면 1 마리가 남는다. 이제 남은 금붕어를 넣을때 다른 금붕어와의 거리가 가장 큰 경우를 생각해보자. 그 거리는 길이가 $\frac{1}{3}$ 인 정육면체의 대각선 길이와 같다.

대각선 길이 $= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이하인 것이 반드시 있다

19. 다음 명제 ㉠, ㉡, ㉢가 각각 부등식 $(a-1)(b-1)(c-1)>0$이기 위한 무슨 조건인지 순서대로 적으면? (단, $a,\ b,\ c$는 실수)

㉠ $a,\ b,\ c$ 중 적어도 하나는 1보다 크다.
㉡ $a,\ b,\ c$ 의 최댓값이 1보다 크다.
㉢ $a,\ b,\ c$ 의 최솟값이 1보다 크다.

① 필요, 충분, 필요충분
② 충분, 필요충분, 충분
③ 필요, 필요충분, 충분
④ 충분, 필요, 필요충분
⑤ 필요, 필요, 충분

해설

㉠ $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이면, $a-1,\ b-1,\ c-1$ 중 하나 또는 셋이 양수이 므로 필요조건 역으로 $a=2,\ b=2,\ c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1)<0$ 이므로 충분조건은 아 니다.
∴ 필요조건
㉡ $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이면 $a,\ b,\ c$ 중 하나 또는 셋이 1 보다 크므로 최댓값은 1 보다 크다. 역으로 $a=2,\ b=2,\ c=-3$ 이면 $(a-1)(b-1)(c-1)<0$ 이므로 충분조건은 아니다.
∴ 필요조건
㉢ $a,\ b,\ c$ 의 최솟값이 1 보다 크면 $(a-1)(b-1)(c-1)>0$ 이므로 충분조건 역으로 $a=2,\ b=0,\ c=0$ 이면 최솟값은 0 이 므로 필요조건은 아니다.
∴ 충분조건

20. 임의의 실수x, y에 대한 부등식 $|x-y| \le |x|+|y|$에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

① $x \le 0,\ y \ge 0$　② $x \ge 0,\ y \le 0$　③ $y = -x$

④ $xy < 0$　⑤ $xy \le 0$

해설

$|x-y| = |x|+|y|$에서 양변을 제곱하여 정리하면 $-2xy = 2|xy|$,
$|xy| = -xy$, $xy \le 0$ 역으로 $xy \le 0$이라 가정하면
ⅰ) $x = 0$또는$y = 0$ 일 때 등식은 성립하고
ⅱ) $xy < 0$ 일 때도 등식은 성립한다.
$\therefore\ |x-y| \le |x|+|y| \Leftrightarrow xy \le 0$