1. $a^2+b^2+c^2=9,\ ab+bc+ca=9,\ a+b+c$의 값은?

① $-3\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ $\pm3\sqrt{3}$
④ $\pm3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$= 9+18=27$$
$\therefore\ a+b+c=\pm3\sqrt{3}$

2. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,
$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$
$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

3. $(a^2-1)(b^2-1)-4ab$를 인수분해하면?

① $(ab-a+b-1)(ab-a-b-1)$

② $(ab-a+b+1)(ab-a-b+1)$

③ $(ab+a-b+1)(ab-a+b-1)$

④ $(ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

⑤ $(ab+a+b+1)(ab+a-b-1)$

해설

(준식) $= a^2b^2-a^2-b^2+1-4ab$

$= (a^2b^2-2ab+1)-(a^2+2ab+b^2)$

$= (ab-1)^2-(a+b)^2$

$= (ab+a+b-1)(ab-a-b-1)$

4. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$　　② $-(a+b+c)(a-b-c)$

③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$　　④ $(a+b)(b+c)(c+a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

5. 세 실수 a, b, c가 다음 세 조건을 만족한다.

$$a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$$

이 때, $(a+b)(b+c)(c+a)$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$a+b+c=1$에서
$a+b=1-c,\ b+c=1-a,\ c+a=1-b$
$(a+b)(b+c)(c+a)$
$=(1-c)(1-a)(1-b)$
$=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc$
$=1-1+1-1=0$

6. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 몫이 $A(x)$, 나머지가 a이고, $x+2$로 나누면 몫이 $B(x)$, 나머지가 b라고 한다. 이때, $A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지를 a, b로 나타내면?

① $a-b$ ② $\frac{a-b}{2}$ ③ $\frac{a-b}{3}$ ④ $\frac{a-b}{4}$ ⑤ $\frac{a-b}{5}$

해설

$f(x) = (x-1)A(x) + a \cdots$ ①
$f(x) = (x+2)B(x) + b \cdots$ ②
①, ②에 각각 $x = 1, x = -2$를 대입하면
$f(1) = a, f(-2) = b$
$A(x)$를 $x+2$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $A(-2)$이다.
①에 $x = -2$를 대입하면
$f(-2) = -3A(-2) + a = b$
$\therefore A(-2) = \frac{a-b}{3}$

7. 인수분해 공식 $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$ 을 이용하여 $\dfrac{9999^3+1}{9998\times9999+1}$ 을 계산하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10000

해설

$9999=a$ 라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998\times9999+1}=\frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=10000$$

8. $\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = k\times 10^{n}$ (단, $0<k<10$, n은 자연수)로 나타낼 때, n의 값을 구하면?

① 72 ② 71 ③ 70 ④ 69 ⑤ 68

해설

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{5}} = N$이라고 하면

$\dfrac{10^{85}}{10^{15}+10^{15}} < N < \dfrac{10^{85}}{10^{15}}$

$\dfrac{10\times 10^{84}}{2\times 10^{15}} < N < \dfrac{10\times 10^{84}}{10^{15}}$

$5\times 10^{69} < N < 10\times 10^{69}$

따라서 $N = k\times 10^{69}(5<k<10)$

$\therefore\ n = 69$

9. n이 자연수일 때 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 $a,\ b$의 값을 정할 때, $a-2b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -7

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)\cdots$①
$x=-2$를 대입하면,
$4^n(4-2a+b)=0\ \therefore\ b=2a-4\cdots$②
②를 ①에 대입하면
$x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$
한편, $x^2+ax+2a-4=x^2-4+a(x+2)$
$=(x+2)(x-2)+a(x+2)$
$=(x+2)(x-2+a)$
$\therefore\ x^{2n}(x+2)(x-2+a)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$
$\therefore\ x^{2n}(x-2+a)=(x+2)Q(x)+4^n$
$x=-2$를 대입하면
$4^n(-4+a)=4^n\quad\therefore -4+a=1\quad\therefore\ a=5$
②에서 $b=6\quad\therefore\ a-2b=-7$

10. 다항식 $f(x)$는 다항식 $g(x)$로 나누어떨어진다. $f(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고, $Q(x)$를 $g(x)$로 나눈 몫과 나머지를 각각 $h(x)$,$r(x)$라고 할 때, $f(x)$를 $\{g(x)\}^2$으로 나눈 몫과 나머지는?

① 몫 $Q(x)$, 나머지 $r(x)$

② 몫 $h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

③ 몫 $Q(x)h(x)$, 나머지 $h(x)r(x)$

④ 몫 $h(x)$, 나머지 $r(x)$

⑤ 몫 $g(x)h(x)$, 나머지 $g(x)r(x)$

해설

$f(x) = g(x)Q(x) \cdots$ ㉠
$Q(x) = g(x)h(x) + r(x) \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$f(x) = \{g(x)\}^2 h(x) + g(x)r(x)$

$r(x)$가 $g(x)$보다 낮은 차수이므로 $g(x)r(x)$는 $\{g(x)\}^2$보다 낮은 차수이다.
따라서, 나머지는 $g(x)r(x)$이고 몫은 $h(x)$이다.