1. 다음 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy의 값을 구하여라.

$$(2k+3)x+(3k-1)y+5k-9=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

k에 대하여 내림차순으로 정리하면
$(2x+3y+5)k+(3x-y-9)=0$
이것은 k에 대한 항등식이므로
$2x+3y+5=0$
$3x-y-9=0$
연립방정식을 풀면 $x=2,\ y=-3$
$\therefore\ xy=2\times(-3)=-6$

2. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+8$이 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=-2,\ b=-8$
② $a=3,\ b=4$
③ $a=-1,\ b=-3$
④ $a=4,\ b=-2$
⑤ $a=-3,\ b=7$

해설

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+8$로 놓으면
$x-1$과 $x-2$로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1)=0$, $f(2)=0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=2+a+b+8=0$,
$f(2)=16+4a+2b+8=0$

$\therefore\ a+b=-10,\ 2a+b=-12$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-8$

3. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b의 값은?

① $a=12,\ b=9$
② $a=-12,\ b=9$
③ $a=12,\ b=-9$
④ $a=-12,\ b=-9$
⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

4. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0 ② 1 ③ -3 ④ 1, 3 ⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

5. $a,\ b$가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$을 만족하는 $a,\ b$의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$에서
$(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$
$a,\ b$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0,\ 4a-5b+6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=2$
따라서 $a+b=3$ 이다.

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 은 $x = 2$ 일 때 최댓값 5를 가진다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

해설

$y = ax^2 + bx - 3 = a(x-2)^2 + 5$

$= ax^2 - 4ax + 4a + 5$ 이므로

$b = -4a, \ -3 = 4a + 5$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, \ b = 8$

$\therefore a + b = 6$

7. $-1 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x-2)^2 - 2a - 4$
이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \le x \le 1$ 에 속하지 않으므로
$f(-1)$, $f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.
따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$
$\therefore a = -2$

8. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, $a^2 + b^2$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

9. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax-y=a \\ x-ay=1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 값은?

① $a=-1$
② $a=1$
③ $a=\pm1$
④ $a \neq \pm1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면
$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$
$\therefore\ a \neq \pm1$
따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는
a의 값은 $a \neq \pm1$ 인 모든 실수이다.

10. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x+2y=8 \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=9 \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=5 \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=2$

▷ 정답 : $y=3$

▷ 정답 : $z=1$

해설

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $x+2y+3z=11$ $\cdots\cdots$ ㉣
㉣ − ㉠에서 $3z=3$ $\therefore z=1$
㉣ − ㉡에서 $x=2$
㉣ − ㉢ 에서 $y=3$

11. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

12. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8 ② 15 ③ 24 ④ 36 ⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)$ $(x^2+x=X$(치환)$)$
$= (X-2)(X-12)$
$= X^2-14X+24$
$= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$= x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
$\therefore\ a = 1+2-13-14+24 = 0,\ b = 24$
$\therefore\ a+b = 0+24 = 24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x = 1$ 대입, $a = 0$
㉡ 상수항 구하기
$x = 0$ 대입, $b = 24$

13. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -21 ② -15 ③ -5 ④ -1 ⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

14. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x에 대한 항등식이므로
$x=1$일 때, $2=c\cdots\cdots$㉠
$x=2$일 때, $9=b+c\cdots\cdots$㉡
$x=3$일 때, $28=2a+2b+c\cdots\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=7$, $c=2$
$\therefore\ a+b+c=15$

15. x에 관한 항등식 $(x^2+x+1)^5 = a_{10}(x+1)^{10}+a_9(x+1)^9+\cdots+a_1(x+1)+a_0$에서 $a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 16 ④ 32 ⑤ 64

해설

주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$(0+0+1)^5 = a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore\ a_0+a_1+\cdots+a_9+a_{10}=1$

16. $\dfrac{2004^3-2003^3-1}{2003\times2004}$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2003=x$ 라 두면 $2004=x+1$

(준 식) $=\dfrac{(x+1)^3-x^3-1}{x(x+1)}$

$=\dfrac{3x(x+1)}{x(x+1)}=3$

17. x에 대한 이차방정식 $x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이 허근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<0$ ② $k>0$ ③ $0<k<\frac{1}{4}$
④ $k\le 0$ ⑤ $k\ge 0$

해설

$x^2k-\left(x-\frac{1}{4}\right)k+\frac{1}{4}=0$이
허근을 가져야 하므로
x에 대한 내림차순으로 정리하면
$kx^2-kx+\frac{1}{4}(k+1)=0$
$D=(-k)^2-4k\cdot\frac{1}{4}(k+1)<0$
$=k^2-k^2-k=-k<0 \quad \therefore k>0$
$\therefore k>0$

18. x의 이차식 $x^2+(3a+1)x+2a^2-b^2$이 완전제곱식이고, a, b가 정수일 때, 순서쌍 (a, b)의 갯수는?

① 1개　　② 2개　　③ 3개　　④ 4개　　⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.

$D=(3a+1)^2-4(2a^2-b^2)=0$

$a^2+6a+1+4b^2=0$

$\Rightarrow \quad (a+3)^2+(2b)^2=8$

a, b가 정수이므로

$a+3=\pm 2, \quad 2b=\pm 2$

$\therefore \quad a=-1, \ -5, \quad b=1, -1$

가능한 순서쌍 (a, b)의 갯수 : 4개

19. 이차방정식 $9x^2-2kx+k-5=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α라 하면, 큰 근은 $\alpha+2$이므로

$\alpha+\alpha+2=\frac{2k}{9}$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha(\alpha+2)=\frac{k-5}{9}$ ⋯⋯ ㉡

㉠에서 $\alpha=\frac{k}{9}-1$,

이것을 ㉡에 대입하면

$k^2-9k-36=0$, $(k-12)(k+3)=0$

$\therefore\ k=12,\ -3$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$\frac{\sqrt{(2k)^2-4\cdot 9(k-5)}}{|9|}=2$에서

$\sqrt{4k^2-36(k-5)}=18$

양변을 제곱하여 정리하면,

$k^2-9k-36=0 \therefore\ k=12,\ -3$

20. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x - 2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

21. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$a+b+c=0$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다.

$$(\text{준식})=\frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab}$$
$$=\frac{a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)}{abc}$$
$$=\frac{-(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$
$$=\frac{-3abc}{abc}=-3$$

해설

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$$=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)$$
$$=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a}$$
$$=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}\ (\because\ a+b+c=0)$$
$$=-3$$

22. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i, \frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f(\frac{1-i}{1+i})+f(\frac{1+i}{1-i})$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$

$=i^{98}+(-i)^{98}$

$=i^2+i^2$

$=-2$

23. α, β를 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$(단, $ac \neq 0$)의 두 근이라 할 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$

② $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$

③ $c^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + a^2 = 0$

④ $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

⑤ $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

해설

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

즉, $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

24. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$의 한근이 $1 + 2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a + b$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x = 1+2i,\ \ x^2 = -3+4i,\ \ x^3 = -11-2i,\ \ x^4 = -7 - 24i,$

$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$

$= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$

$(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$

$\therefore\ 11a + 3b = 22,\ -2a + 4b = -4$

연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$x = 1 + 2i$에서 $x^2 - 2x + 5 = 0$

$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a = k - 2,\ b = 8 - 2k,\ 14 = 5k - 6$

$\therefore\ \ k = 4,\ a = 2,\ b = 0$

25. α는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$이 되는 자연수 n의 값으로 적당한 것은?

① 65　　② 66　　③ 67　　④ 68　　⑤ 69

해설

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$이므로
양변에 각각 $(1 - \alpha)$를 곱하면
$(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(1 - \alpha) = 0$,
$1 - \alpha^{n+1} = 0$
$\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$이므로
$\alpha^6 = 1$
$\therefore\ n + 1 = 6k (k = 1, 2, 3, \dots)$
$\therefore\ k = 11$일 때 $n = 65$가 될 수 있다.