

1. 다음 등식이 k 의 값에 관계없이 항상 성립할 때, xy 의 값을 구하여라.

$$(2k + 3)x + (3k - 1)y + 5k - 9 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

k 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2x + 3y + 5)k + (3x - y - 9) = 0$$

이것은 k 에 대한 항등식이므로

$$2x + 3y + 5 = 0$$

$$3x - y - 9 = 0$$

연립방정식을 풀면 $x = 2, y = -3$

$$\therefore xy = 2 \times (-3) = -6$$

2. 다항식 $2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 이 $x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 a, b 의 값은?

① $a = -2, b = -8$

② $a = 3, b = 4$

③ $a = -1, b = -3$

④ $a = 4, b = -2$

⑤ $a = -3, b = 7$

해설

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 8$ 로 놓으면

$x-1$ 과 $x-2$ 로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1) = 0, f(2) = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(1) = 2 + a + b + 8 = 0,$$

$$f(2) = 16 + 4a + 2b + 8 = 0$$

$$\therefore a + b = -10, 2a + b = -12$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -2, b = -8$

3. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b$ 가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a, b 의 값은?

① $a = 12, b = 9$

② $a = -12, b = 9$

③ $a = 12, b = -9$

④ $a = -12, b = -9$

⑤ $a = 9, b = 12$

해설

$x^4 + 4x^3 - 2x^2 + ax + b = (x^2 + px + q)^2$ 으로 놓으면
이 식의 우변은

$$\begin{aligned} & x^4 + 2x^2(px + q) + (px + q)^2 \\ &= x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2 \end{aligned}$$

좌변과 계수를 비교하면

$$2p = 4, \quad p^2 + 2q = -2$$

$$p = 2, \quad q = -3 \text{에서}$$

$$a = 2pq = -12, \quad b = q^2 = 9$$

4. $(1+i)x^2 + 2(1+2i)x - 3 + 3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0

② 1

③ -3

④ 1, 3

⑤ -1

해설

$$(1+i)x^2 + 2(1+2i)x - 3 + 3i$$

$$= x^2 + x^2i + 2x + 4xi - 3 + 3i$$

$$= (x^2 + 2x - 3) + (x^2 + 4x + 3)i$$

순허수를 만족하려면 실수부=0, 허수부 $\neq 0$ 이어야 한다.

$x^2 + 2x - 3 = 0$ 이면서, $x^2 + 4x + 3 \neq 0$ 인 x 값을 찾아야 한다.

$$\therefore x = 1$$

5. a, b 가 실수일 때, $(a + 2i)(3 + 4i) + 5(1 - bi) = 0$ 을 만족하는 a, b 의 값의 합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(a + 2i)(3 + 4i) + 5(1 - bi) = 0 \text{에서}$$

$$(3a - 3) + (4a - 5b + 6)i = 0$$

a, b 가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a - 3 = 0$, $4a - 5b + 6 = 0$

$$\therefore a = 1, b = 2$$

따라서 $a + b = 3$ 이다.

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 은 $x = 2$ 일 때 최댓값 5를 가진다. 이때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$y = ax^2 + bx - 3 = a(x - 2)^2 + 5$$

$$= ax^2 - 4ax + 4a + 5 \text{ 이므로}$$

$$b = -4a, \quad -3 = 4a + 5$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a = -2, \quad b = 8$$

$$\therefore a + b = 6$$

7. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x - 2a$ 의 최솟값이 1 일 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$f(x) = x^2 - 4x - 2a = (x - 2)^2 - 2a - 4$$

이 때, 꼭짓점의 x 좌표 2 가 $-1 \leq x \leq 1$ 에 속하지 않으므로

$f(-1), f(1)$ 중 작은 값이 최솟값이다.

따라서, 최솟값은 $f(1) = -3 - 2a = 1$

$$\therefore a = -2$$

8. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a , 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$$

$$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{5}, x = \pm\sqrt{6}$$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$$

9. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}, -a^2 \neq -1$$

$$\therefore a \neq \pm 1$$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

10. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 2y + 3z = 9 \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ 3z + x = 5 \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $y = 3$

▷ 정답 : $z = 1$

해설

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 에서 $x + 2y + 3z = 11 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉠}$ 에서 $3z = 3 \therefore z = 1$

$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉡}$ 에서 $x = 2$

$\textcircled{㉤} - \textcircled{㉢}$ 에서 $y = 3$

11. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) \quad \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b \quad \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b \quad \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) \quad \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b \quad \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

해설

$$\text{㉡ } 2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b): \text{ 결합법칙}$$

12. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$ 를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a , 상수항을 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 8

② 15

③ 24

④ 36

⑤ 47

해설

$$\begin{aligned} & (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x=X(\text{치환})) \\ &= (X-2)(X-12) \\ &= X^2-14X+24 \\ &= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24 \\ &= x^4+2x^3-13x^2-14x+24 \\ \therefore a &= 1+2-13-14+24=0, \quad b=24 \\ \therefore a+b &= 0+24=24 \end{aligned}$$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기

$$x=1 \text{ 대입, } a=0$$

㉡ 상수항 구하기

$$x=0 \text{ 대입, } b=24$$

13. 두 다항식 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$, $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -21

② -15

③ -5

④ -1

⑤ 0

해설

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.

따라서 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore a = b \quad \therefore a - b = 0$

14. x 의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

$$x^3 + 1 = (x-1)(x-2)(x-3) + a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x 에 대한 항등식이므로

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 = c \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 9 = b + c \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } 28 = 2a + 2b + c \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 7, c = 2$

$$\therefore a + b + c = 15$$

15. x 에 관한 항등식 $(x^2 + x + 1)^5 = a_{10}(x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ 에서 $a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$(0 + 0 + 1)^5 = a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_0$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10} = 1$$

16. $\frac{2004^3 - 2003^3 - 1}{2003 \times 2004}$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

2003 = x 라 두면 2004 = $x + 1$

$$(\text{준 식}) = \frac{(x+1)^3 - x^3 - 1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{3x(x+1)}{x(x+1)} = 3$$

17. x 에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$ 이 허근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $k < 0$

② $k > 0$

③ $0 < k < \frac{1}{4}$

④ $k \leq 0$

⑤ $k \geq 0$

해설

$$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0 \text{ 이}$$

허근을 가져야 하므로

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k+1) = 0$$

$$D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k+1) < 0$$

$$= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$$

$$\therefore k > 0$$

18. x 의 이차식 $x^2 + (3a + 1)x + 2a^2 - b^2$ 이 완전제곱식이고, a, b 가 정수일 때, 순서쌍 (a, b) 의 갯수는?

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.

$$D = (3a + 1)^2 - 4(2a^2 - b^2) = 0$$

$$a^2 + 6a + 1 + 4b^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a + 3)^2 + (2b)^2 = 8$$

a, b 가 정수이므로

$$a + 3 = \pm 2, \quad 2b = \pm 2$$

$$\therefore a = -1, -5, \quad b = 1, -1$$

가능한 순서쌍 (a, b) 의 갯수 : 4개

19. 이차방정식 $9x^2 - 2kx + k - 5 = 0$ 의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α 라 하면, 큰 근은 $\alpha + 2$ 이므로

$$\alpha + \alpha + 2 = \frac{2k}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha(\alpha + 2) = \frac{k - 5}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \alpha = \frac{k}{9} - 1,$$

이것을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면

$$k^2 - 9k - 36 = 0, (k - 12)(k + 3) = 0$$

$$\therefore k = 12, -3$$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$$\frac{\sqrt{(2k)^2 - 4 \cdot 9(k - 5)}}{|9|} = 2 \text{에서}$$

$$\sqrt{4k^2 - 36(k - 5)} = 18$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$k^2 - 9k - 36 = 0 \therefore k = 12, -3$$

20. x, y, z 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
 $= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
 $= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
 x, y, z 는 실수이므로
 $(x - 2)^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는
 $x - 2 = 0, y = 0, z = 0$ 일 때,
최댓값 9를 갖는다.

21. $a + b + c = 0$ 일 때, $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$a + b + c = 0$ 이면 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ 이다.

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(a+c)}{ac} + \frac{c(a+b)}{ab} \\ &= \frac{a^2(-a) + b^2(-b) + c^2(-c)}{abc} \\ &= \frac{-(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} \\ &= \frac{-3abc}{abc} = -3 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} &a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= \frac{a+c}{b} + \frac{b+a}{c} + \frac{b+c}{a} \\ &= \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} + \frac{-a}{a} \quad (\because a+b+c=0) \\ &= -3 \end{aligned}$$

22. $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = -i, \frac{1+i}{1-i} = i \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$= f(-i) + f(i)$$

$$= \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$$

$$= i^{98} + (-i)^{98}$$

$$= i^2 + i^2$$

$$= -2$$

23. α, β 를 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ (단, $ac \neq 0$)의 두 근이라 할 때, 다음 중 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2, \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 을 두 근으로 가지는 이차방정식은?

① $a^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + c^2 = 0$

② $a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x - c^2 = 0$

③ $c^2x^2 + (b^2 - 4ac)x + a^2 = 0$

④ $c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

⑤ $c^2x^2 + (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$

해설

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

따라서, 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{(b^2 - 2ac)}{c^2}x + \frac{a^2}{c^2} = 0$$

$$\text{즉, } c^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + a^2 = 0$$

24. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$ 의 한근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이면 $x = 1 + 2i$, $x^2 = -3 + 4i$, $x^3 = -11 - 2i$, $x^4 = -7 - 24i$,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$$

$$= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$$
$$(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$$

$$\therefore 11a + 3b = 22, -2a + 4b = -4$$

연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$$x = 1 + 2i \text{에서 } x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$$a = k - 2, b = 8 - 2k, 14 = 5k - 6$$

$$\therefore k = 4, a = 2, b = 0$$

25. α 는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이 되는 자연수 n 의 값으로 적당한 것은?



① 65

② 66

③ 67

④ 68

⑤ 69

해설

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이므로

양변에 각각 $(1 - \alpha)$ 를 곱하면

$$(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(1 - \alpha) = 0,$$

$$1 - \alpha^{n+1} = 0$$

$$\therefore \alpha^{n+1} = 1$$

한편, $\alpha^3 = -1$ 이므로

$$\alpha^6 = 1$$

$$\therefore n + 1 = 6k (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$\therefore k = 11$ 일 때 $n = 65$ 가 될 수 있다.