1. 다항식 $2x^3+x^2+3x$를 x^2+1로 나눈 나머지는?

① $x-1$ ② x ③ 1
④ $x+3$ ⑤ $3x-1$

해설

직접 나누어보면

$(2x+1)+\dfrac{x-1}{x^2+1}$

몫 : $2x+1$, 나머지 : $x-1$

2. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

3. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$ ② $-1 < a < 0$ ③ $-2 < a < 0$
④ $a \geq -\frac{1}{3}$ ⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2+6a+9-a^2-7 \geq 0$

$6a+2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

4. x에 대한 이차식 $2x^2 + (k+1)x + k - 1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$2x^2 + (k+1)x + k - 1$이 완전제곱식이므로

$D = (k+1)^2 - 8(k-1) = 0$

$(k-3)^2 = 0$

$\therefore\ k = 3$

5. 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값은?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 7 ④ 20 ⑤ -12

해설

$|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{60}}{3}$

$\therefore \ (\alpha-\beta)^2 = |\alpha-\beta|^2 = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$

6. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$가 $x = 1$에서 최솟값 1을 가지고 $f(2) = 3$을 만족시킬 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a + b + c$의 값은?

① -4　　② -3　　③ 1　　④ 4　　⑤ 7

해설

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로

$a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$

즉, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ 이므로

$b = -4,\ c = 3$

$\therefore a + b + c = 2 - 4 + 3 = 1$

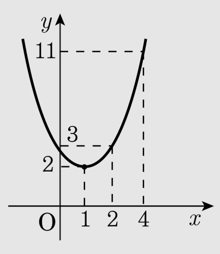
7. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$

따라서 함수의 그래프는 점$(1, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로



(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은 $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$

$\therefore\ m = 3$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$\therefore\ M = 11$

$\therefore\ M + m = 14$

8. 다음 연립방정식을 만족하는 (x, y, z)가 바르게 짝지어진 것은?

$3x-y=y+z=3x-z=1$

① $(1, 1, 1)$　② $(-1, 1, 2)$　③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$　⑤ $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$

해설

$3x-y=1,\ y+z=1,\ 3x-z=1$

변변끼리 모두 더하면, $6x=3,\ x=\frac{1}{2}$

각각 대입하면, $y=\frac{1}{2},\ z=\frac{1}{2}$

$\therefore\ (x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

9. $(10^5+2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 26 ⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$10^{15}+2^3+3\times2\times10^5(10^5+2)$

$=10^{15}+2^3+6\times10^{10}+12\times10^5$

$=10^{15}+10^{10}\times6+10^5\times12+8$

$\therefore\ 1+6+1+2+8=18$

10. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$　　② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$　　④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$　　$\therefore\ d = \sqrt{14}$

$= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

11. $f(x)$를 $x-1$로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$를 x^2+2x-3으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x+1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)Q(x)+3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x)+2\}+3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x)+2(x-1)+3 \\ &= (x^2+2x-3)Q'(x)+2x+1 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

12. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$ 의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$　　② $2x - y + 2$　　③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$　　⑤ $x - 2y - 1$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2 - (y+4)x - y^2 + y + 2$

$= 2x^2 - (y+4)x - (y+1)(y-2)$

$= \{2x + (y-2)\}\{x - (y+1)\}$

$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$

13. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 <u>모두</u> 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉣　③ ㉡, ㉢　④ ㉡, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \geq 4b^2$ 일 때만 실근 존재

14. 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-x+1=0$
② $x^2+x+1=0$
③ $x^2+x+2=0$
④ $x^2-x+2=0$
⑤ $x^2-2x+3=0$

해설

$x^2-3x+4=0$의 두 근을 α, β라 하면
근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$
한편, $(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2=3-2=1$
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=4-3+1=2$
따라서, 두 근의 합과 곱이 각각 1, 2인 이차방정식은 $x^2-1\cdot x+2=0$
$\therefore\ x^2-x+2=0$

15. 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값과 $f(f(x))$ 의 최솟값이 같게 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \le 0$　② $a \ge 0$　③ $a \le 1$　④ $a \ge 1$　⑤ $a \le 2$

해설

$f(x) = x^2 + 2x + a = (x+1)^2 + a - 1$ 은
$x = -1$ 일 때 최솟값 $a - 1$ 을 갖는다.
$\therefore f(x) \ge a - 1$
$f(x) = t$ 라면
$f(f(x)) = f(t) = t^2 + 2t + a (t \ge a - 1)$
이때, 꼭짓점의 t 좌표 -1 이
$t \ge a - 1$ 에 포함되면
$f(t)$ 의 최솟값이 $f(-1) = a - 1$ 이 되어 최솟값과 같아진다.
즉, $-1 \ge a - 1$　$\therefore a \le 0$

16. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2-2x)^2-6(x^2-2x)-16=0$$

① 4　　② -4　　③ -2　　④ $1+i$　　⑤ $1-i$

해설

$x^2-2x=X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-6X-16=0,\ (X-8)(X+2)=0$
$\therefore x=8$ 또는 $X=-2$
(i) $X=8$ 일 때 $x^2-2x=8$ 에서 $(x-4)(x+2)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=-2$
(ii) $X=-2$ 일 때$x^2-2x=-2$ 에서 $x^2-2x+2=0$
$\therefore x=1\pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x=4$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1\pm i$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{1}{3}$　③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$　⑤ -1

해설

$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 & \cdots ① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 & \cdots ② \end{cases}$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0$,

$x=-y, x=-2y$

ⅰ) $x=-y$를 ②에 대입 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm1, x=\pm1$(복호동순)

ⅱ) $x=-2y$를 ②에 대입 $y^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$(복호동순)

그러므로 $x,\ y$값이 될 수 없는 것은

② $\frac{1}{3}$

18. 방정식 $x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$을 만족시키는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하면?

① -7　　② -1　　③ 1　　④ 3　　⑤ 7

해설

$x^2+5y^2+4xy-2y+1=0$에서

$x^2+4xy+4y^2+y^2-2y+1=0$

$(x+2y)^2+(y-1)^2=0$

$x+2y,\ y-1$은 실수이므로 $x+2y=0,\ y-1=0$

$\therefore\ y=1,\ x=-2y=-2$

$\therefore\ x+y=-1$

19. 다항식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때의 나머지가 3이고, x^2-4x+3으로 나눌 때의 나머지가 $3x$일 때, $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지는?

① 3　　② $3x+3$　　③ $3x-3$

④ $6x-9$　　⑤ $9x+6$

해설

$f(x)=(x-2)(x-1)Q(x)+3$
$f(x)=(x-3)(x-1)Q'(x)+3x$
$\therefore\ f(2)=3,\ f(3)=9$ $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때의 나머지를 $ax+b$라 하면
$f(x)=(x-2)(x-3)Q''(x)+ax+b$
$f(2)=2a+b=3,\ f(3)=3a+b=9$
$a=6,\ b=-9$
$\therefore$ 나머지는 $6x-9$

20. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x = 21$이라 하면

$\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$

$= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3)+1}$

$= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1}$

$= \sqrt{(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1}$

$= \sqrt{\{(x^2+3x)+1\}^2}$

$= x^2+3x+1 \ (\because (x^2+3x)+1>0)$

$= 21^2+3 \cdot 21+1 = 505$

각자리 숫자의 합은 $5+0+5=10$

21. 복소수 $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

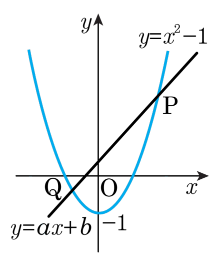
해설

$z = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$
$z^2 = -2i,\ z^3 = -2 - 2i$
$\therefore\ z^3 - 2z^2 + 2z + 5$
$= (-2i - 2) - 2(-2i) + 2(1 - i) + 5$
$= 5$

해설

$$\begin{aligned} z = 1 - i \quad &\Rightarrow \quad z - 1 = -i \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 1 = -1 \\ &\Rightarrow \quad z^2 - 2z + 2 = 0 \end{aligned}$$
$z^3 - 2z^2 + 2z + 5 = z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5$

22. 이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프와 직선 $y=ax+b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x의 좌표가 $1+\sqrt{2}$일 때, $2a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y=x^2-1$ 의 그래프와 직선 $y=ax+b$ 의 한 교점 P 의 x 좌표가 $1+\sqrt{2}$ 이므로 $1+\sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2-1=ax+b$ 의 근이다.

$\left(1+\sqrt{2}\right)^2-1=a\left(1+\sqrt{2}\right)+b$

$2+2\sqrt{2}=a+b+a\sqrt{2}$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$2=a+b$, $2=a$

$\therefore a=2$, $b=0$

23. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α,β,γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\dfrac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$이므로
x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.
최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을
$f(x)$라 하면 세 근의 합이 3이므로
$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$
$f(2x+3)$
$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$
3차항과 2차항의 계수를 중심으로
식을 정리하면
$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$
$\therefore$세 근의 합$=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을
각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,
$2p+3=\alpha\ \cdots$㉠
$2q+3=\beta\ \cdots$㉡
$2r+3=\gamma\ \cdots$㉢
㉠$+$㉡$+$㉢에서
$2(p+q+r)+9=3$
$\therefore\ p+q+r=-3$