

1. 다항식 $2x^3 + x^2 + 3x$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지는?

① $x - 1$

② x

③ 1

④ $x + 3$

⑤ $3x - 1$

해설

직접 나누어보면

$$(2x + 1) + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

몫 : $2x + 1$, 나머지 : $x - 1$

2. 다항식 $x^3 + ax - 8$ 을 $x^2 + 4x + b$ 로 나눌 때, 나머지가 $3x + 4$ 가 되도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$x^3 + ax - 8$ 을 $x^2 + 4x + b$ 로 직접나눈 나머지는

$$(a - b + 16)x + 4b - 8$$

$$(a - b + 16)x + 4b - 8 = 3x + 4 \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{7}$ 이 x 에 대한 항등식이므로,

$$a - b + 16 = 3, 4b - 8 = 4$$

$$\therefore a = -10, b = 3$$

$$\therefore a + b = -7$$

해설

$x^3 + ax - 8 = (x^2 + 4x + b)(x + p) + 3x + 4$ 의 양변의 계수를 비교하여 $a = -10, b = 3, p = -4$ 를 구해도 된다.

3. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a+3)x + a^2 + 7 = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \geq 0$

② $-1 < a < 0$

③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\frac{1}{3}$

⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$$

$$a^2 + 6a + 9 - a^2 - 7 \geq 0$$

$$6a + 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$$

4. x 에 대한 이차식 $2x^2 + (k + 1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이 될 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$2x^2 + (k + 1)x + k - 1$ 이 완전제곱식이므로

$$D = (k + 1)^2 - 8(k - 1) = 0$$

$$(k - 3)^2 = 0$$

$$\therefore k = 3$$

5. 이차방정식 $3x^2 + 6x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha - \beta)^2$ 의 값은?

① $\frac{7}{3}$

② $\frac{20}{3}$

③ 7

④ 20

⑤ -12

해설

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{60}}{3}$$

$$\therefore (\alpha - \beta)^2 = |\alpha - \beta|^2 = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$$

6. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 1$ 에서 최솟값 1을 가지고 $f(2) = 3$ 을 만족시킬 때, 상수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c$ 의 값은?

① -4

② -3

③ 1

④ 4

⑤ 7

해설

$f(x) = a(x-1)^2 + 1$ 에서 $f(2) = 3$ 이므로

$$a + 1 = 3 \quad \therefore a = 2$$

즉, $f(x) = 2(x-1)^2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$ 이므로

$$b = -4, c = 3$$

$$\therefore a + b + c = 2 - 4 + 3 = 1$$

7. $2 \leq x \leq 4$ 에서 이차함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 최댓값은 M , 최솟값은 m 이다. $M + m$ 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$$y = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$$

따라서 함수의 그래프는 점(1,2) 를 꼭지점으로 하는 아래로 볼록한 포물선이므로

(i) $x = 2$ 일 때 최소이며, 최솟값은

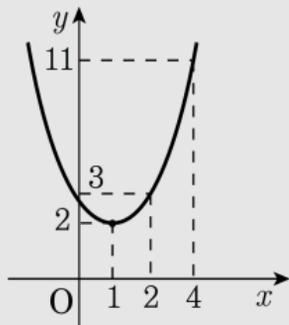
$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3$$

$$\therefore m = 3$$

(ii) $x = 4$ 일 때 최대이며, 최댓값은 $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 3 = 11$

$$\therefore M = 11$$

$$\therefore M + m = 14$$



8. 다음 연립방정식을 만족하는 (x, y, z) 가 바르게 짝지어진 것은?

$$3x - y = y + z = 3x - z = 1$$

① $(1, 1, 1)$

② $(-1, 1, 2)$

③ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

④ $(1, \frac{1}{2}, 1)$

⑤ $(0, \frac{1}{2}, 1)$

해설

$$3x - y = 1, y + z = 1, 3x - z = 1$$

변변끼리 모두 더하면, $6x = 3, x = \frac{1}{2}$

각각 대입하면, $y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

$$\therefore (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

9. $(10^5 + 2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15

② 18

③ 21

④ 26

⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$$\begin{aligned} & 10^{15} + 2^3 + 3 \times 2 \times 10^5 (10^5 + 2) \\ &= 10^{15} + 2^3 + 6 \times 10^{10} + 12 \times 10^5 \\ &= 10^{15} + 10^{10} \times 6 + 10^5 \times 12 + 8 \\ &\therefore 1 + 6 + 1 + 2 + 8 = 18 \end{aligned}$$

10. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$

② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$

④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

$$\begin{aligned} \text{대각선 : } d^2 &= x^2 + y^2 + z^2 & \therefore d &= \sqrt{14} \\ &= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \\ &= 6^2 - 22 = 14 \end{aligned}$$

11. $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눌 때 나머지가 3이다. 또, 이때의 몫을 $x+3$ 으로 나눈 나머지가 2이면 $f(x)$ 를 x^2+2x-3 으로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $2x+1$

해설

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-1)Q(x) + 3 \\ &= (x-1)\{(x+3)Q'(x) + 2\} + 3 \\ &= (x-1)(x+3)Q'(x) + 2(x-1) + 3 \\ &= (x^2 + 2x - 3)Q'(x) + 2x + 1\end{aligned}$$

따라서, 구하는 나머지는 $2x+1$

12. 다음 중 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$ 의 인수인 것은?

① $2x + y - 2$

② $2x - y + 2$

③ $x - y + 1$

④ $x + y - 1$

⑤ $x - 2y - 1$

해설

x 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$2x^2 - (y + 4)x - y^2 + y + 2$$

$$= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2)$$

$$= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\}$$

$$= (2x + y - 2)(x - y - 1)$$

13. 0 이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉣

⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0, D = a^2 - 4b$

$b \leq \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2, a^2 \geq 4b^2$ 일 때만 실근 존재

14. 이차방정식 $x^2 - 3x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha - 1, \beta - 1$ 을 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - x + 1 = 0$

② $x^2 + x + 1 = 0$

③ $x^2 + x + 2 = 0$

④ $x^2 - x + 2 = 0$

⑤ $x^2 - 2x + 3 = 0$

해설

$x^2 - 3x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

근과 계수의 관계에서 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 4$

한편, $(\alpha - 1) + (\beta - 1) = (\alpha + \beta) - 2 = 3 - 2 = 1$

$(\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$

따라서, 두 근의 합과 곱이 각각 1, 2인 이차방정식은 $x^2 - 1 \cdot x + 2 = 0$

$\therefore x^2 - x + 2 = 0$

15. 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x + a$ 에 대하여 $f(x)$ 의 최솟값과 $f(f(x))$ 의 최솟값이 같게 되도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $a \leq 0$ ② $a \geq 0$ ③ $a \leq 1$ ④ $a \geq 1$ ⑤ $a \leq 2$

해설

$$f(x) = x^2 + 2x + a = (x + 1)^2 + a - 1 \text{ 은}$$

$x = -1$ 일 때 최솟값 $a - 1$ 을 갖는다.

$$\therefore f(x) \geq a - 1$$

$$f(x) = t \text{ 라면}$$

$$f(f(x)) = f(t) = t^2 + 2t + a (t \geq a - 1)$$

이때, 꼭짓점의 t 좌표 -1 이

$t \geq a - 1$ 에 포함되면

$f(t)$ 의 최솟값이 $f(-1) = a - 1$ 이 되어 최솟값과 같아진다.

$$\text{즉, } -1 \geq a - 1 \quad \therefore a \leq 0$$

16. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) - 16 = 0$$

① 4

② -4

③ -2

④ $1 + i$

⑤ $1 - i$

해설

$x^2 - 2x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은

$$X^2 - 6X - 16 = 0, (X - 8)(X + 2) = 0$$

$$\therefore x = 8 \text{ 또는 } X = -2$$

$$(i) X = 8 \text{ 일 때 } x^2 - 2x = 8 \text{ 에서 } (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

$$(ii) X = -2 \text{ 일 때 } x^2 - 2x = -2 \text{ 에서 } x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm i$$

따라서 (i), (ii)에서 $x = 4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1 \pm i$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 \end{cases}$ 의 해를 $x = a, y = b$ 라 할 때,

다음 중 a 또는 b 의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

② $\frac{1}{3}$

③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

⑤ -1

해설

$$\begin{cases} x^2 + 3xy + 2y^2 = 0 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = -4 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $(x+y)(x+2y) = 0$,

$x = -y, x = -2y$

i) $x = -y$ 를 ②에 대입 $y^2 = 1$

$\therefore y = \pm 1, x = \pm 1$ (복호동순)

ii) $x = -2y$ 를 ②에 대입 $y^2 = \frac{4}{3}$

$\therefore y = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, x = \mp \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (복호동순)

그러므로 x, y 값이 될 수 없는 것은

② $\frac{1}{3}$

18. 방정식 $x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

① -7

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 7

해설

$$x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$$

$$(x + 2y)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

$$x + 2y, y - 1 \text{은 실수이므로 } x + 2y = 0, y - 1 = 0$$

$$\therefore y = 1, x = -2y = -2$$

$$\therefore x + y = -1$$

19. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때의 나머지가 3이고, $x^2 - 4x + 3$ 으로 나눌 때의 나머지가 $3x$ 일 때, $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지는?

① 3

② $3x + 3$

③ $3x - 3$

④ $6x - 9$

⑤ $9x + 6$

해설

$$f(x) = (x-2)(x-1)Q(x) + 3$$

$$f(x) = (x-3)(x-1)Q'(x) + 3x$$

$\therefore f(2) = 3, f(3) = 9$ $f(x)$ 를 $x^2 - 5x + 6$ 으로 나눌 때의 나머지를 $ax + b$ 라 하면

$$f(x) = (x-2)(x-3)Q''(x) + ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 3, f(3) = 3a + b = 9$$

$$a = 6, b = -9$$

\therefore 나머지는 $6x - 9$

20. $\sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1}$ 은 자연수이다. 이 때, 각 자리의 수의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$x = 21$ 이라 하면

$$\begin{aligned} & \sqrt{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 + 1} \\ &= \sqrt{x(x+1)(x+2)(x+3) + 1} \\ &= \sqrt{\{x(x+3)\}(x+1)(x+2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2+3x)(x^2+3x+2) + 1} \\ &= \sqrt{(x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x) + 1} \\ &= \sqrt{\{(x^2+3x) + 1\}^2} \\ &= x^2 + 3x + 1 \quad (\because (x^2+3x) + 1 > 0) \\ &= 21^2 + 3 \cdot 21 + 1 = 505 \\ & \text{각자리 숫자의 합은 } 5 + 0 + 5 = 10 \end{aligned}$$

21. 복소수 $z = \frac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^3 - 2z^2 + 2z + 5$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$z = \frac{2}{1+i} = 1 - i$$

$$z^2 = -2i, z^3 = -2 - 2i$$

$$\therefore z^3 - 2z^2 + 2z + 5$$

$$= (-2i - 2) - 2(-2i) + 2(1 - i) + 5$$

$$= 5$$

해설

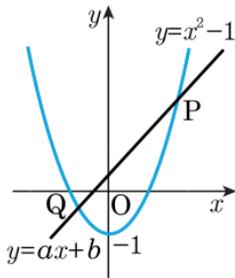
$$z = 1 - i \Rightarrow z - 1 = -i$$

$$\Rightarrow z^2 - 2z + 1 = -1$$

$$\Rightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$z^3 - 2z^2 + 2z + 5 = z(z^2 - 2z + 2) + 5 = 5$$

22. 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 가 다음 그림과 같이 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x의 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 유리수이다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프와 직선 $y = ax + b$ 의 한 교점 P의 x 좌표가 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 $1 + \sqrt{2}$ 는 이차방정식 $x^2 - 1 = ax + b$ 의 근이다.

$$(1 + \sqrt{2})^2 - 1 = a(1 + \sqrt{2}) + b$$

$$2 + 2\sqrt{2} = a + b + a\sqrt{2}$$

a, b 가 유리수이므로 무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = a + b, \quad 2 = a$$

$$\therefore a = 2, \quad b = 0$$

23. 삼차방정식 $f(x) = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma = 3$ 일 때, 방정식 $f(2x + 3) = 0$ 의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\frac{x^2 \text{의 계수}}{x^3 \text{의 계수}}\right)$ 이므로

x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.

최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을

$f(x)$ 라 하면 세 근의 합이 3이므로

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + d$$

$$f(2x + 3)$$

$$= (2x + 3)^3 - 3 \cdot (2x + 3)^2 + b \cdot (2x + 3) + d$$

3차항과 2차항의 계수를 중심으로

식을 정리하면

$$8x^3 + 24x^2 + \dots \dots = 0$$

$$\therefore \text{세 근의 합} = -3$$

해설

$f(2x + 3) = 0$ 의 세 근을

각각 p, q, r 이라 하면,

$$2p + 3 = \alpha \dots \textcircled{㉠}$$

$$2q + 3 = \beta \dots \textcircled{㉡}$$

$$2r + 3 = \gamma \dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 에서

$$2(p + q + r) + 9 = 3$$

$$\therefore p + q + r = -3$$