1. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$
$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로
$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$
(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$
$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$
따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

2. $\dfrac{5}{1+2i} = x+yi$ 를 만족하는 실수 x, y 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = -1$

해설

$\dfrac{5}{1+2i} = \dfrac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$

$1-2i = x+yi$

$x = 1, y = -2, x+y = -1$

3. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z를 구하면?

$$z + \bar{z} = 4, \quad z \cdot \bar{z} = 7$$

① $z = 1 \pm \sqrt{3}i$ ② $z = 2 \pm \sqrt{3}i$ ③ $z = 3 \pm \sqrt{3}i$
④ $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$ ⑤ $z = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

해설

$z = a + bi$
$z + \bar{z} = 2a = 4, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 7$
$\therefore a = 2, b = \pm\sqrt{3}$
$\therefore z = 2 \pm \sqrt{3}i$

4. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 <u>아닌</u> 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 2 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^{n} = i^n$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ $(m \geq 0)$

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

5. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ii) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

6. 다음 식에서 등호가 처음 잘못 사용된 부분을 고르면?

$$i = \sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i} = \frac{i^2}{i} = -i$$

① $\sqrt{-1} = \sqrt{\frac{1}{-1}}$ ② $\sqrt{\frac{1}{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$ ③ $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{i}$

④ $\frac{1}{i} = \frac{i^2}{i}$ ⑤ $\frac{i^2}{i} = -i$

해설

$a > 0,\ b < 0$ 일 때 $\sqrt{\frac{a}{b}} \neq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

예를들면, $i = \sqrt{\frac{1}{-1}} \neq \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = -i$

7. x에 대한 일차방정식 $5x + a = 2x + 12$의 해가 자연수일 때, 자연수 a 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개
④ 4개 ⑤ 무수히 많다

해설

$5x - 2x = 12 - a, 3x = 12 - a$

$\therefore x = \dfrac{12 - a}{3}$

자연수 $a = 1, 2, 3, \cdots$ 을 대입했을 때,

$x = \dfrac{12 - a}{3}$ 가 자연수가 되는 경우는

$12 - a$ 가 3 의 배수이면서 $a < 12$ 일 때이다.

i) $a = 3$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 3}{3} = 3$

ii) $a = 6$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 6}{3} = 2$

iii) $a = 9$ 일 때, $x = \dfrac{12 - 9}{3} = 1$

따라서 자연수 a 의 개수는 3 개이다.

8. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\{x-(1+i)\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

9. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$
$x=-1$ 또는 $x=3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$
ⅱ) $x<0$일 때
$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$
$x=1$ 또는 $x=-3$
그런데 $x<0$이므로 $x=-3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$
따라서 근의 합은 0이다.

10. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 $a,\ b$의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9　② -5　③ 3　④ 6　⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.
$\therefore$두 근의 합 $-a = 4$ $\quad\therefore a = -4$
두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$
$\therefore b = 10 \quad \therefore a + b = 10 - 4 = 6$

11. 복소수 z 에 대하여 다음의 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $z \neq 0$ 이며, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수임)

㉠ $z\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉡ $z+\bar{z}=0$ 이면, z 는 순허수이다.
㉢ $z+\bar{z}$ 는 항상 실수이다.
㉣ $z-\bar{z}$ 는 항상 순허수이다.
㉤ $\frac{1}{z}$ 과 $\frac{1}{\bar{z}}$ 의 실수부는 항상 동일하다.

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$

㉠ $z\bar{z}=a^2+b^2 \Rightarrow$ 실수

㉡ $z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0, a=0$

$\therefore\ z=bi \Rightarrow$순허수 ($\because\ z \neq 0$ 이므로 $b \neq 0$)

㉢ $z+\bar{z}=2a \Rightarrow$ 실수

㉣ $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$

순허수로 판단하기 쉬우나, $b=0$ 인 경우

$z-\bar{z}=0$ 으로 순허수가 아니다.

㉤ $\frac{1}{z}=c+di$ 라면 $\frac{1}{\bar{z}}=\overline{\frac{1}{z}}=c-di$ 이므로 참

12. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5,\quad \bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

13. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12　② −12　③ 15　④ −15　⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore\ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\qquad =(b-a)\omega+(12-2a)$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because\ \omega$는 허수)

$\therefore\ a=6,\ b=9$

14. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{50}$ 일 때, $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)+f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준식}) &= \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{50}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{50}\\ &=(-i)^{50}+(i)^{50}\\ &=(-i)^2+(i)^2\\ &=-2\end{aligned}$$

15. 양수 x에 대하여 $[x] = n$이라 할 때, $x^2 + (x-n)^2 = 20$이다. 이 때, $2x - n$의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① $\sqrt{6}$　② $2\sqrt{6}$　③ $\sqrt{5}$　④ $2\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{10}$

해설

$x - n = \alpha$라 하면 $0 \le \alpha < 1$
$x^2 = 20 - \alpha^2$에서 $19 < x^2 \le 20$
즉, $\sqrt{19} < x \le \sqrt{20}$이므로 $[x] = n = 4$이다.
따라서, 주어진 식은 $x^2 + (x-4)^2 = 20$이 되고,
식을 정리하면 $x^2 - 4x - 2 = 0$
$\therefore\ x = 2 + \sqrt{6} (\because x > 0)$
$\therefore\ 2x - n = 4 + 2\sqrt{6} - 4 = 2\sqrt{6}$