1. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면?

① 수학을 잘하는 학생들의 모임

② 예쁜 신발들의 모임

③ 가장 작은 자연수의 모임

④ 우리 반에서 키가 큰 학생들의 모임

⑤ 채소들의 모임

해설

③ 가장 작은 자연수의 모임 : 1
⑤ 채소들의 모임 : 오이, 당근, 토마토, ···

2. 20 의 약수의 모임을 집합 A 라고 할 때, □안에 $\in$ 기호가 들어가야 하는 것은?

① $3 \square A$ ② $A \square 4$ ③ $6 \square A$

④ $1 \square A$ ⑤ $7 \square A$

해설

20 의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20 이다. 3 과 6, 7 은 집합 A 의 원소가 아니고 1 과 4 는 집합 A 의 원소이다.

3. 다음 중 무한집합을 모두 골라라.

㉠ $A = \{x \mid x$는 아시아에 속하는 국가$\}$
㉡ $B = \{x \mid x$는 100보다 큰 자연수$\}$
㉢ $C = \{x \mid x$는 20 이상의 자연수$\}$
㉣ $D = \{x \mid x$는 방위의 종류$\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

㉠ $A = \{$대한민국, 일본, 중국, $\cdots$, 싱가포르$\}$: 유한집합
㉡ $B = \{100, 101, 102, \cdots\}$: 무한집합
㉢ $C = \{20, 21, 22, 23, 24, \cdots\}$: 무한집합
㉣ $D = \{$동, 서, 남, 북$\}$: 유한집합

4. 집합 $A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $3 \in A$

② $\emptyset \in A$

③ $\{5,\ 13\} \notin A$

④ $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\} \subset A$

⑤ $A = \{x \mid x$는 10보다 작은 소수$\}$

해설

$\emptyset \subset A$

5. 다음 중 틀린 것은?

① $\{1,2\} \subset \{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\}$

② $\{0,2,4\} \subset \{2,4,6,8\}$

③ $\phi \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

④ $\{1,3,6\} \subset \{x \mid x$는 12의 약수$\}$

⑤ $\{1,3,7\} \not\subset \{0,1,3,5\}$

해설

② $\{0,\ 2,\ 4\}$ 가 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$의 부분집합이 아니므로 $\{0,\ 2,\ 4\} \not\subset \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

6. 다음 중 집합 $\{2,\ 3,\ 5\}$의 진부분집합인 것은?

① $\{1\}$ ② $\{1,\ 2\}$ ③ $\{2,\ 4\}$

④ $\{3,\ 5\}$ ⑤ $\{2,\ 3,\ 5\}$

해설

$\{2,\ 3,\ 5\}$의 부분집합 중 $\{2,\ 3,\ 5\}$을 제외한 나머지 부분집합을 찾으면 된다.

7. 집합 $A = \{1,\ 10\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A = \{1,\ 10\}$ 이므로 A 의 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2 를 곱한 값과 같다.
따라서 A 의 부분집합의 개수는 $2^2 = 2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

8. 집합 $A = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15\}$ 에 대하여 12 를 반드시 포함하고 15 를 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

9. 두 집합 $A = \{3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 $A \subset X \subset B$를 만족하는 집합 X의 개수를 모두 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 8개

해설

$A \subset X \subset B$는 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소를 반드시 포함하는 부분집합을 나타낸다.
따라서 $\{3, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로 개수는 8개이다.

10. 두 집합 A, B가 다음 그림과 같을 때, $A \cup B$에 해당하는 부분에 색칠하여라.

①

②

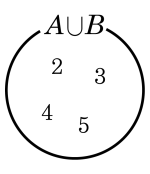
③

④

⑤

해설

11. 두 집합 A, B에 대하여, 집합 $A = \{2, 3\}$ 이고 $A \cup B$는 다음 벤 다이어그램과 같다. 이를 만족하는 집합 B로 가능한 것은?



① $\varnothing$ ② $\{4\}$ ③ $\{4, 5\}$

④ $\{2, 4\}$ ⑤ $\{1, 2, 4, 5\}$

해설

$A = \{2, 3\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$이므로 $\{4, 5\} \subset B \subset \{2, 3, 4, 5\}$이다.

12. 세 집합 A, B, X 에 대하여 $X \cap (A \cup B) = X$ 일 때 다음 중 옳은 것은?

① $X \subset A$　② $X \subset (A \cap B)$　③ $X \subset (A \cup B)$

④ $(A \cup B) \subset X$　⑤ $(A \cap B) \subset X$

해설

$X \cap (A \cup B) = X$ 는 $X \subset (A \cup B)$ 를 의미한다.
① $X \subset A$ 는 알 수 없다.
② $X \subset (A \cap B)$ 는 알 수 없다.
④ $(A \cup B) \subset X$ 는 알 수 없다.
⑤ $(A \cap B) \subset X$ 는 알 수 없다.

13. 다음 집합을 조건제시법으로 나타낸 것이다. 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cup B = \{x|x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$

② $A - B = \{x|x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$

③ $A \cap B = \{x|x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$

④ $A^c = \{x|x \in U \text{ 또는 } x \notin A\}$

⑤ $B - A = \{x|x \notin A \text{ 그리고 } x \in B\}$

해설

$A^c = \{x|x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\}$

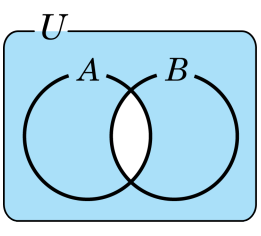
14. 다음 벤 다이어그램을 보고 옳은 것을 모두 고르면?
(정답 2개)

① $B \subset A$
② $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9\}$
③ $A \cup B = B$
④ $B - A = \varnothing$
⑤ $A - B = \varnothing$

해설

$A \subset B$ 이므로 $A \cup B = B$, $A - B = \varnothing$ 이다.

15. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U)=20$, $n(A)=15$, $n(A-B)=7$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은
$(A\cap B)^c = U-(A\cap B)$ 이다.
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$ 이므로
$n(A\cap B)=15-7=8$ 이다.
따라서 $n(U)-n(A\cap B)=20-8=12$ 이다.

16. 다음 문장 중 명제인 것을 모두 고르면?

① 4는 12의 약수이다.
② $x+y=10$ 이다.
③ $|-3|=-3$
④ $x=2$ 일 때, $x-1>0$
⑤ x 는 무리수이다.

해설

① 참, ③ 거짓, ④ 참
따라서 명제는 ①, ③, ④

17. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$　② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$　④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$

⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$의 부정은 $1 \leq x \leq 2$이다.

18. 명제 '$a = 1$ 이면 $a^2 = a$ 이다.'에 대하여 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 고르면?

① 역　② 이　③ 대우

④ 역, 이　⑤ 역, 이, 대우

해설

$a^2 - a = a(a-1) = 0$, $a = 0,\ 1$
역 : '$a^2 = a$이면 $a = 1$이다.' → 거짓
이 : '$a \neq 1$ 이면 $a^2 \neq a$ 이다.' → 거짓
대우 : '$a^2 \neq a$이면 $a \neq 1$이다.' → 참

19. 다음 (　　)안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 (　　)조건이다.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

20. $x-1=0$이 $2x^2+ax-1=0$이기 위한 충분조건일 때 상수 a의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x-1=0$이면 $2x^2+ax-1=0$이 참이므로
$x=1$을 대입하면 $2+a-1=0$
$\therefore a=-1$

21. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$　② $A \cap B = \varnothing$　③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$　⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

22. $0 < a < 1$ 일 때, $P = \frac{1}{a}$, $Q = \frac{1}{2-a}$, $R = \frac{a}{2+a}$ 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $P < R < Q$ ② $R < Q < P$ ③ $Q < P < R$
④ $Q < R < P$ ⑤ $R < P < Q$

해설

i) $\frac{1}{a} - \frac{1}{2-a} = \frac{2-a-a}{a(2-a)} = \frac{2(1-a)}{a(2-a)}$

이 때 $a > 0,\ 2-a > 0,\ 1-a > 0$ 이므로

$\frac{2(1-a)}{a(2-a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{2-a}$

즉, P>Q

ii) $\frac{1}{a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a^2}{a(2+a)} = \frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)}$

이 때 $a > 0,\ 2+a > 0,\ a-2 < 0, a+1 > 0$ 이므로

$\frac{-(a-2)(a+1)}{a(2+a)} > 0 \qquad \therefore \frac{1}{a} > \frac{a}{2+a}$

즉, P>R

iii) $\frac{1}{2-a} - \frac{a}{2+a} = \frac{2+a-a(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$= \frac{2+a-2a+a^2}{(2-a)(2+a)} = \frac{a^2-a+2}{(2-a)(2+a)}$

이 때 $2-a > 0, 2+a > 0, a^2-a+2 > 0$ 이므로 $\frac{1}{2-a} > \frac{a}{2+a}$

$\therefore Q > R$ 따라서, $P > Q > R$ 이다.

23. $x>0$, $y>0$ 일 때 두 식 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, $\sqrt{2(x+y)}$ 를 바르게 비교한 것은?

① $\sqrt{x}+\sqrt{y}<\sqrt{2(x+y)}$ ② $\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{2(x+y)}$

③ $\sqrt{x}+\sqrt{y}>\sqrt{2(x+y)}$ ④ $\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge\sqrt{2(x+y)}$

⑤ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2(x+y)}$

해설

$\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$, $\sqrt{2(x+y)}>0$

이 때 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$=(x+y+2\sqrt{xy})-(2x-2y)$

$=-(x-2\sqrt{xy}+y)$

$=-(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\le 0$

이므로 $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2\le\left\{\sqrt{2(x+y)}\right\}^2$

$\therefore(\sqrt{x}+\sqrt{y})\le\sqrt{2(x+y)}$

(단, 등호는 $\sqrt{x}=\sqrt{y}$, 즉 $x=y$일 때 성립)

24. $x>0,\ y>0$일 때, $(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 25

해설

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

$$=13+\frac{12y}{x}+\frac{3x}{y}$$

$$\geq 13+2\sqrt{\frac{12y}{x}\cdot\frac{3x}{y}}$$

$$=13+12=25$$

$$\therefore (3x+4y)\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 25$$

(단, 등호는 $\frac{12y}{x}=\frac{3x}{y}$, 즉 $x=2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 25이다.

25. 실수 a, b, x, y에 대하여 $a^2+b^2=5, x^2+y^2=3$일 때 다음 중 $ax+by$의 값이 될 수 없는 것은?

① -1 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
$5 \times 3 \geq (ax+by)^2$
$\therefore -\sqrt{15} \leq ax+by \leq \sqrt{15}$
따라서 4는 $ax+by$의 범위에 속하지 않는다.