1. $x^2 - 5x + 6 = 0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$

2. x에 대한 이차방정식 $kx^2 - x - (k+7) = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하면?(단 k는 상수)

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

방정식에 $x = 2$를 대입하면

$k \cdot 2^2 - 2 - (k+7) = 0$

$4k - 2 - k - 7 = 0$, $3k = 9$,

$\therefore\ k = 3$

$3x^2 - x - 10 = 0$, $(3x+5)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = 2, -\frac{5}{3}$

3. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

4. 사차방정식 $x^4 - 11x^2 + 30 = 0$ 의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4 - 11x^2 + 30 = 0$

$(x^2 - 5)(x^2 - 6) = 0$

$\therefore\ x = \pm\sqrt{5},\ x = \pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a = -\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b = \sqrt{6}$

$\therefore\ a^2 + b^2 = 6 + 6 = 12$

5. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

6. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore\ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow\quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
∴ ①이 조건에 맞다

7. 이차방정식 $|x^2-5|=4x$의 모든 근의 합은?

① 5　　② 0　　③ 6　　④ 10　　⑤ 12

해설

i) $x^2-5\ge 0 \Rightarrow x\le -\sqrt{5}$ 또는 $x\ge \sqrt{5}$ $\cdots$ ㉠

$x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ 또는 5

$\Rightarrow\ \ x=5$ ($\because$ ㉠)

ii) $x^2-5<0 \ \Rightarrow\ -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ $\cdots$ ㉡

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1$ 또는 -5

$\Rightarrow\ \ x=1$ ($\because$ ㉡)

$\therefore$ 근의 합 : 6

8. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

> (가)를 계수로 갖는 이차방정식은 (나)의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다)를 계수로 갖는 이차식 ax^2+bx+c는 (라)의 범위에서는 반드시 (마)의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

9. 실수 a, b에 대하여 연산$*$를 $a * b = a^2 + b$ 로 정의한다. 방정식 $x * (x - 6) = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha + 2\beta$의 값을 구하여라. (단, $\alpha < \beta$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x * (x - 6) = 0$ 에서

$x^2 + x - 6 = 0$

$(x + 3)(x - 2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ 2$

$\therefore\ \alpha = -3,\ \beta = 2\ (\alpha < \beta)$

$\therefore \alpha + 2\beta = 1$

10. 다음 방정식을 풀면?

$$(2-\sqrt{3})x^2+(1-\sqrt{3})x-1=0$$

① $x=-1$ 또는 $-\sqrt{3}$
② $x=-1$ 또는 $-2+\sqrt{3}$
③ $x=-1$ 또는 $2+\sqrt{3}$
④ $x=1$ 또는 $2-\sqrt{3}$
⑤ $x=1$ 또는 $=2+\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $2+\sqrt{3}$ 을 곱하면
$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$
$x^2-(1+\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$
$(x+1)\left\{x-(2+\sqrt{3})\right\}=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

11. 방정식 $x^2 + |x| = |x-1| + 5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$　② $-\sqrt{6}$　③ 0
④ $\sqrt{6}$　⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x < 0$일 때
$x^2 - x = -(x-1) + 5,\ x^2 = 6$
$\therefore x = \pm\sqrt{6}$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -\sqrt{6}$
ⅱ) $0 \le x < 1$일 때
$x^2 + x = -(x-1) + 5$
$x^2 + 2x - 6 = 0$
$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$
그런데 $0 \le x < 1$이므로 해가 없다.
ⅲ) $x \ge 1$일 때,
$x^2 + x = x - 1 + 5,\ x^2 = 4$
$\therefore x = \pm 2$
그런데 $x \ge 1$이므로 $x = 2$
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는
$x = 2$또는 $x = -\sqrt{6}$이므로
두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

12. 방정식 $\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x-\frac{1}{2}\right]-7=0$ 의 해 $a \le x < b$ 또는 $c \le x < d$ 에 대하여 $a+b+c+d$ 의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\left[x-\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{1}{2}\right]-1$ 이므로

$\left[x+\frac{1}{2}\right]^2-3\left[x+\frac{1}{2}\right]-4=0$

$\left[x+\frac{1}{2}\right]=4$ 또는 $\left[x+\frac{1}{2}\right]=-1$ 이므로

$\frac{7}{2} \le x < \frac{9}{2}, -\frac{3}{2} \le x < -\frac{1}{2}$ 이다

따라서 구하는 값은

$\therefore a+b+c+d=6$

13. $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$
$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$
$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$
$=9-6\cdot2+12=9$

14. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\
 & & -1 & 3 & -4 & 4 \\
\hline
2 & 1 & -3 & 4 & -4 & \multicolumn{1}{|r}{0} \\
 & & 2 & -2 & 4 & \\
\hline
 & 1 & -1 & 2 & \multicolumn{1}{|r}{0} &
\end{array}
$$

$(x+1)(x-2)(x^2-x+2)=0$
따라서 두 허근은 $x^2-x+2=0$ 의 근
허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=1$

15. 방정식 $(x^2+x+2)^2+8=12(x^2+x)$ 의 모든 근의 합은?

① 1 ② 0 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

$x^2+x=Y$ 라 하면, $(Y+2)^2+8=12Y$
$Y^2-8Y+12=0$, $(Y-2)(Y-6)=0$
$Y=2$ 또는 $Y=6$
(i) $Y=2$
$x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$ 또는 $x=1$
(ii) $Y=6$
$x^2+x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x=-3$ 또는 $x=2$
$\therefore$ 모든 근의 합 $=-2$

16. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면
$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$
이 식을 정리하면
$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$
무리수가 서로 같은 조건에 의하여
$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$
따라서, $m = 10$
계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.
나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서
$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······㉠
$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······㉡
㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······㉢
㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$
$\therefore\ m = 10$

17. 삼차방정식 $x^3-8x^2+17x-10=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta\gamma$의 값은?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{(-8)}{1}=8$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}=\dfrac{17}{1}=17$

$\alpha\beta\gamma=\dfrac{d}{a}=-\dfrac{(-10)}{1}=10$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(8)^2-2\cdot(17)=30$

$-2\alpha\beta\gamma=-2\cdot 10=-20$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta\gamma=10$

18. $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\dfrac{\omega^2}{\omega^{10}+1} + \dfrac{\omega^{10}+1}{\omega^2}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

$2\omega + 1 = -\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면

$\omega^2 + \omega + 1 = 0$

따라서 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이 ω 이다.

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore \omega^3 = 1$

$$(\text{준식}) = \frac{-(1+\omega)}{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1} + \frac{(\omega^3)^3 \cdot \omega + 1}{-(1+\omega)}$$
$$= \frac{-(\omega+1)}{(\omega+1)} + \frac{(\omega+1)}{-(\omega+1)} = -2$$

19. 방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$ 의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ 의 값을 구하면?

① 7　　② 11　　③ 15　　④ 19　　⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=-1$
$x^3+2x^2-3x+1=0$ 의 세 근이 α ,β ,γ 이므로 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 이다. $x=2$ 를 대입하면 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=2^3+2\times2^2-2\times3+1$
$=8+8-6+1=11$

20. $x^4+2x^3+(a-1)x^2-2x-a=0$의 네 근이 모두 실수가 되도록 실수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4+2x^3+(a-1)x^2-2x-a=0$에서 $x=1, x=-1$일 때 성립하므로
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $=(x-1)(x+1)(x^2+2x+a)=0$
따라서 모두 실근이 되려면
$x^2+2x+a=0$의 $\frac{D}{4}\geq 0$이어야 하므로
$1^2-1\cdot a\geq 0 \quad \therefore a\leq 1$
따라서 a의 최댓값은 1이다.

21. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $y = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $x^5 + y^5 = 1$　② $x^7 + y^7 = 1$　③ $x^9 + y^9 = 1$

④ $x^{11} + y^{11} = 1$　⑤ $x^{13} + y^{13} = 1$

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 는 $x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이다

$\therefore\ x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\therefore\ x^3 = y^3 = -1,\ x + y = 1,\ xy = 1$

① : $x^5 + y^5 = x^3 \times x^2 + y^3 \times y^2 = -(x^2 + y^2) = -\{(x+y)^2 - 2xy\} = 1$

② : $x^7 + y^7 = (x^3)^2 x + (y^3)^2 y = x + y = 1$

③ : $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3 = -2$

④ : $x^{11} + y^{11} = (x^3)x^2 + (y^3)^3 y^2 = -(x^2 + y^2) = 1$

⑤ : $x^{13} + y^{13} = (x^3)^4 x + (y^3)^4 y = x + y = 1$

22. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라 하고
$z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$라 할 때, $z\bar{z}$의 값을 구하면?
(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다)

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{3}{7}$

해설

$x^3 - 1 = 0(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$에서
$w,\ \overline{w}$는 $x^2 + x + 1 = 0$의
두 근이므로 근과 계수의 관계에서
$w + \overline{w} = -1,\ w\overline{w} = 1$
또한, $z = \dfrac{\omega + 1}{2\omega + 1}$에서 $\bar{z} = \dfrac{\overline{w} + 1}{2\overline{w} + 1}$이므로

$$z\bar{z} = \frac{w+1}{2w+1} \times \frac{\overline{w}+1}{2\overline{w}+1}$$
$$= \frac{w\overline{w} + (w + \overline{w}) + 1}{4w\overline{w} + 2(w + \overline{w}) + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3}$$

해설

$x^3 - 1 = 0$, $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$
$\therefore\ w^2 + w + 1 = 0$, $w = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$라 하자

$$z = \frac{w+1}{2w+1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}}{\sqrt{3}i}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6}$$
$$z\bar{z} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} = \frac{9 + 3}{36} = \frac{1}{3}$$

23. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$일 때, $x + \frac{1}{x}$의 값은?(단, x는 실수)

① $-1 + \sqrt{6}$ ② $-1 - \sqrt{6}$ ③ $\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$

④ $\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$ ⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$이므로

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$의 양변을

x^2으로 나누면

$x^2 + 2x - 3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x}^{2} = 0$

$\therefore \left(x^2 + \frac{1}{x}^{2}\right) + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$

$x + \frac{1}{x} = t$로 놓으면

$(t^2 - 2) + 2t - 3 = 0,\ t^2 + 2t - 5 = 0$

$\therefore\ t = -1 \pm \sqrt{6}$

(ii) $x + \frac{1}{x} = -1 \pm \sqrt{6}$

그런데 $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geq 2$이므로

($\because$ x는 실수)

$\therefore\ x + \frac{1}{x} = -1 - \sqrt{6}$

24. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 α, 방정식 $x^3 = 2$의 한 허근을 β라고 할 때, $x^3 - 2 = (x-\beta)(x-\alpha\beta)p(x)$를 만족시키는 다항식 $p(x)$에 대하여 $p(\alpha^5\beta)$의 값은?

① α ② $\alpha\beta$ ③ α^2 ④ 0 ⑤ 1

해설

$\beta^3 = 2,\ (\alpha\beta)^3 = \alpha^3\beta^3 = 2,$
$(\alpha^2\beta)^3 = (\alpha^3)^2 \cdot \beta^3 = 2$이므로
방정식 $x^3 = 2$의 근은 $\beta,\ \alpha\beta,\ \alpha^2\beta$이다.
따라서 $x^3 - 2 = (x-\beta)(x-\alpha\beta)(x-\alpha^2\beta)$
$\therefore\ p(x) = x - \alpha^2\beta$

$$\begin{aligned}\therefore\ p(\alpha^5\beta) &= \alpha^5\beta - \alpha^2\beta \\ &= \alpha^3 \cdot \alpha^2\beta - \alpha^2\beta \\ &= \alpha^2\beta - \alpha^2\beta \\ &= 0\end{aligned}$$

25. 서로 다른 세 복소수 $a,\ b,\ c$ 가 $a+b+c=0$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ 을 만족할 때, $\frac{b}{a}+\frac{\overline{a}}{c}$ 의 값을 구하여라. (단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$a+b+c=0,\ a+b=-c \quad \cdots$ ①

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0,\ ab+bc+ca=0 \quad \cdots$ ②

②에서 $ab=-c(a+b)\ \leftarrow$ ①대입

$\therefore\ ab=c^2 \leftarrow$ ㉠

마찬가지로

$bc=a^2-$ ㉡, $ca=b^2-$ ㉢

㉢ ÷ ㉡ : $\frac{a}{b}=\left(\frac{b}{a}\right)^2, \left(\frac{b}{a}\right)^3=1$

㉡ ÷ ㉠ : $\frac{c}{a}=\left(\frac{a}{c}\right)^2, \left(\frac{a}{c}\right)^3=1$

즉, $\frac{b}{a}, \frac{a}{c}$ 는 $t^3=1, (t-1)(t^2+t+1)=0$ 의 근이고 a, b, c 가 서로 다른 수이므로

$\frac{b}{a}, \frac{a}{c}$ 는 $t^2+t+1=0$ 의 근이다.

또한 ㉡에서 $bc=a^2$ 이므로 $\frac{b}{a}=\frac{a}{c}$

$\therefore\ \frac{b}{a}$ 와 $\frac{\overline{a}}{c}$ 는 $t^2+t+1=0$ 의 서로 다른 두 근

$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{\overline{a}}{c}=-1$ (두 근의 합)