

1. $(x+1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ 이 x 에 대한 항등식일 때, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 128

해설

양변에 $x = 1$ 을 대입하면,
 $(1+1)^5 = a_0 + a_1 + \cdots + a_5$ 이므로
 $\therefore 2^5 = 32$

2. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 이 중근을 가질 때, 실수 k 의 값은?

① 1

② 3

③ 6

④ 9

⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$$

$$\therefore k = 9$$

3. $j^2 = -\sqrt{-1}$ 라 할 때, j^{2012} 의 값은?

① 1

② -1

③ $\sqrt{-1}$

④ $-\sqrt{-1}$

⑤ 두 개의 값을 갖는다.

해설

$$j^4 = (-\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$\therefore j^{2012} = (j^4)^{503} = (-1)^{503} = -1$$

4. $(2-i)\bar{z} + 4iz = -1 + 4i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은 ?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$z = a + bi \text{라 놓으면 } \bar{z} = a - bi$$

$$(2-i)(a-bi) + 4i(a+bi) = -1 + 4i$$

$$(2a-5b) + (3a-2b)i = -1 + 4i$$

$$\therefore 2a-5b = -1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$3a-2b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a=2, b=1$$

$$\therefore z = 2 + i, \quad \bar{z} = 2 - i$$

$$\therefore z\bar{z} = (2+i)(2-i) = 2^2 - i^2 = 5$$

5. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1, x = 2$ 를 대입하면 성립하므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$
따라서 실수근은 $-1, 2$ 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

6. 이차부등식 $x^2 + 2x + a < 0$ 의 해가 $-4 < x < 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.(단, a 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

해가 $-4 < x < 2$ 이므로

$$(x+4)(x-2) < 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = x^2 + 2x + a$$

$$\therefore a = -8$$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \leq x + 4 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

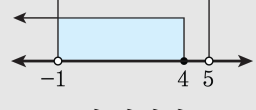
$$\textcircled{㉠} 2x \leq x + 4,$$

$$\therefore x \leq 4$$

$$\textcircled{㉡} x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 5$$



$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 범위의

공통범위는 $-1 < x \leq 4$

$\therefore x = 0, 1, 2, 3, 4$ 총 5 개

8. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $abc = -1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ ab + bc + ca &= -1 \\ a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 2 \times (6 - (-1)) - 3 = 11\end{aligned}$$

9. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x 의 값은?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ -5

해설

$$(1 + \sqrt{3}i)(x - i) = 2(x + i)$$

$$(x + \sqrt{3}) + (\sqrt{3}x - 1)i = 2x + 2i$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$x + \sqrt{3} = 2x, \quad \sqrt{3}x - 1 = 2$$

$$\therefore x = \sqrt{3}$$

10. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta} \cdot \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 가지는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서

$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$ 이다.

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$= (\alpha + \beta) + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + \frac{3}{1} = 6$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = 1 + 2 + 1 = 4$$

$\therefore \alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 가지는 x 의 이차방정식은

$$x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\therefore a = -6, b = 4$$

$$\therefore a + b = -2$$

11. 이차방정식 $(2-k)x^2 + 2kx + 1 = 0$ 이 서로 다른 부호의 실근을 갖는 실수 k 의 값의 범위는?

① $k < -2, k > 1$

② $k < -2$

③ $k > 0$

④ $k > 2$

⑤ $k < 2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 갖기 위한 조건은

$$\alpha\beta < 0 \text{이므로 } \frac{1}{2-k} < 0$$

$$\therefore 2-k < 0$$

$$\therefore 2 < k$$

12. 두 함수 $y = x^2 - 2kx + 4k$, $y = 2kx - 3$ 의 그래프에 대하여 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있도록 k 의 값의 범위를 정하면?

- ① $-\frac{7}{9} < k < -\frac{11}{6}$ ② $-\frac{1}{4} < k < -\frac{6}{5}$ ③ $-\frac{1}{3} < k < 0$
 ④ $-\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{2} < k < \frac{7}{5}$

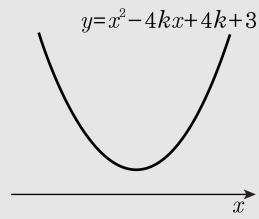
해설

함수 $y = x^2 - 2kx + 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2kx - 3$ 보다 항상 위쪽에 있으려면

$$y = x^2 - 2kx + 4k > 2kx - 3,$$

즉 $x^2 - 4kx + 4k + 3 > 0$ 이 항상 성립해야 한다.

이 때, 이 부등식이 항상 성립하려면 그림과 같이 $y = x^2 - 4kx + 4k + 3$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있어야 하므로



$$\frac{D}{4} = 4k^2 - 4k - 3 < 0, \quad (2k + 1)(2k - 3) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < k < \frac{3}{2}$$

13. 두 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$ 을 만족시킬 때, y 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$ 에서 x 가 실수이므로

$$\frac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$$

$$(y + 3)(y - 2) \leq 0$$

$$\therefore -3 \leq y \leq 2$$

따라서 y 의 최댓값은 2, 최솟값은 -3 이다.

14. 부등식 $|x + 1| < 1 + |2 - x|$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < 1$

해설

$|x + 1| < 1 + |2 - x|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때,

$$-(x + 1) < 1 + (2 - x)$$

$\therefore -1 < 3$ 이므로 성립

$\therefore x < -1$

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,

$$x + 1 < 1 + 2 - x$$

$\therefore 2x < 2$

$\therefore x < 1$

조건과 공통 범위를 구하면 $-1 \leq x < 1$

iii) $x \geq 2$ 일 때,

$$x + 1 < 1 - (2 - x)$$

$\therefore 1 < -1$ 이므로 모순

i), ii), iii)에서 구하는 부등식의 해는 $x < 1$

15. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2(k-1)x + 3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하여라.

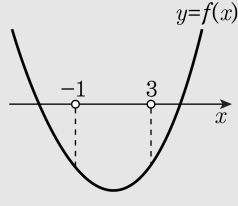
▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.

$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \leq 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \leq 0$, $k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -3$

(ii) $f(3) \leq 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \leq 0$, $9k+3 \leq 0$

$\therefore k \leq -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k \leq -3$

따라서, 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.

16. $a^2 - b^2 = 2$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은?

① 2^n

② 2^{n+1}

③ 2^{n+2}

④ 2^{n+3}

⑤ 2^{n+4}

해설

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= A, (a-b)^n = B \\(\text{준식}) &= (A^2 + 2AB + B^2) - (A^2 - 2AB + B^2) \\&= 4AB \\&= 4\{(a+b)(a-b)\}^n \\&= 4 \times 2^n \\&= 2^{n+2}\end{aligned}$$

17. 1999개의 다항식 $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 2, \dots, x^2 - 2x - 1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2 - 2x - n = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \leq n \leq 1999$ 인 자연수)

$$ab = n, a = b - 2$$

$\therefore n = 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 43 \cdot 45 (= 1935)$ 의 43개

18. 세 개의 실수 a, b, c 에 대하여 $[a, b, c] = (a-b)(a-c)$ 라 할 때,
 $[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$ 이면 $[a, b, c]$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = 0$$

$$\text{전개하여 정리하면 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

$$\therefore [a, b, c] = (a-b)(a-c) = 0$$

19. $x^2 - 2kx + 1 = 0$ 의 해를 α, β 라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 = 2$ 가 되도록 하는 k 의 값들의 합을 구하면?

- ① 1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = 1$ 이므로
 $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2$ 에서
 $(2k)^3 - 3 \cdot 1 \cdot 2k = 2$
 $4k^3 - 3k - 1 = 0, (k - 1)(4k^2 + 4k + 1) = 0,$
 $(k - 1)(2k + 1)^2 = 0$
 $\therefore k = 1, -\frac{1}{2}$
 $\therefore k$ 값들의 합은 $\frac{1}{2}$

20. 다음의 x, y 에 대한 연립방정식의 해가 무수히 많을 때, $x + y$ 의 값을 구하라.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx + cy + a = 0 \end{cases}$$

(단, a, b, c 는 0이 아닌 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = -1$

해설

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & \cdots \textcircled{A} \\ bx + cy + a = 0 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

해가 무수히 많으므로

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k \text{가 성립한다.}$$

따라서, $a = bk, b = ck, c = ak$ 에서

$$abc = abck^3, abc \neq 0 \text{이므로}$$

$$k^3 = 1 \text{이다.}$$

즉, $k = 1, a = c$ 이므로

$$\textcircled{A}, \textcircled{B} \text{의 식은 } a(x + y + 1) = 0$$

$a \neq 0$ 이므로

$$x + y + 1 = 0 \text{에서 } x + y = -1$$

21. 이차부등식 $x^2 - 2x - 3 > 3|x - 1|$ 의 해가 이차부등식 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해와 같을 때, 실수 a, c 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

1) $x \geq 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > 3x - 3, x^2 - 5x > 0$
 $x(x - 5) > 0, x < 0$ 또는 $x > 5$
 $\therefore x > 5$
2) $x < 1$ 일 때,
 $x^2 - 2x - 3 > -3x + 3, x^2 + x - 6 > 0$
 $(x + 3)(x - 2) > 0, x < -3$ 또는 $x > 2$
 $\therefore x < -3$
1), 2)에서 $x < -3$ 또는 $x > 5$
한편 $ax^2 + 2x + c < 0$ 의 해가
 $x < -3$ 또는 $x > 5$ 이므로
 $a < 0$ 이고, $ax^2 + 2x + c = a(x + 3)(x - 5)$ 이다.
 $ax^2 + 2x + c = ax^2 - 2ax - 15a$ 에서
 $a = -1, c = 15 \quad \therefore a + c = 14$