1. $(2x^3-3x^2+3x+4)(3x^4+2x^3-2x^2-7x+8)$ 을 전개한 식에서 x^3 의 계수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

해설

$2x^3\times 8-3x^2\times(-7x)+3x\times(-2x^2)+4\times 2x^3=39x^3$

2. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는
$(a-b+16)x+4b-8$
$(a-b+16)x+4b-8=3x+4 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로,
$a-b+16=3,\ 4b-8=4$
$\therefore\ a=-10,\ b=3$
$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

3. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

(좌 변) $= (x^2 + 2)^2 - x^2$

$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

4. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

5. 방정식 $|x-1|=2$ 의 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : -1

해설

ⅰ) $x \geq 1$ 일 때
$|x-1| = x-1$ 이므로, $x-1=2$
$\therefore x=3$
ⅱ) $x < 1$ 일 때
$|x-1| = -x+1$ 이므로, $-x+1=2$
$\therefore x=-1$
따라서 (ⅰ), (ⅱ) 에서 $x=3$ 또는 $x=-1$

6. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 $2,\ \alpha$일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$

$4k + 4k + 8 = 0$에서 $k = -1$

$k = -1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2 - x + 6 = 0,\ x^2 + x - 6 = 0$

$(x+3)(x-2) = 0,\ x = 2, -3$

$\therefore k = -1,\ \alpha = -3$

$\therefore\ k + \alpha = -4$

7. 이차방정식 $x^2+(a+1)x+a-5=0$의 두 실근을 β, β^2이라 할 때, $a+\beta+\beta^2$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

두 근의 합은 $\beta+\beta^2=-a-1$이므로
$a+\beta+\beta^2=a-a-1=-1$

8. 이차방정식 $2x^2-6x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $2x^2-6x+1=0$
② $x^2-6x+1=0$
③ $x^2-7x+3=0$
④ $2x^2+6x-1=0$
⑤ $2x^2-7x+3=0$

해설

근과 계수의 관계에서

$\alpha+\beta=\frac{6}{2}=3$, $\alpha\beta=\frac{1}{2}$ 이므로

3 과 $\frac{1}{2}$을 이용한 근과 계수의 관계를 구해보면

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0$

$\therefore\ 2x^2-7x+3=0$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 - i$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 0

해설
다른 한 근은 복소수의 켤레근인 $1 + i$ 이므로
두 근의 합 : $(1 + i) + (1 - i) = -a \quad \therefore\ a = -2$
두 근의 곱 : $(1 + i)(1 - i) = b \quad \therefore\ b = 2$
$\therefore\ a + b = -2 + 2 = 0$

10. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면
$x^3-6x^2+11x-30=0$
$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

11. 사차방정식 $x^4-11x^2+30=0$의 네 근 중 가장 작은 근을 a, 가장 큰 근을 b라 할 때, a^2+b^2의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$x^4-11x^2+30=0$

$(x^2-5)(x^2-6)=0$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{5},\ x=\pm\sqrt{6}$

가장 작은 근 $a=-\sqrt{6}$, 가장 큰 근 $b=\sqrt{6}$

$\therefore\ a^2+b^2=6+6=12$

12. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2　　② $-1+\sqrt{2}$, -3　　③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3　　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

13. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$ ② $x<-5$ ③ $x>-5$

④ $x<5$ ⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots$㉠

㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots$㉡

㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로

$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\ -a+2b=a+b$

$\therefore 2a=b\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0 \therefore a<0$

㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면

$(2a-3a)x+a+4a>0,\ -ax>-5a\ \therefore x>5$

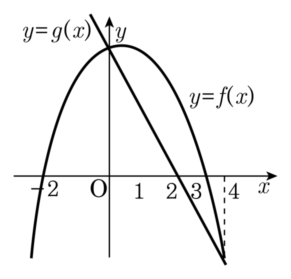
14. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+4>0$이 항상 성립하도록 할 때, 상수 m의 값의 범위에 속한 정수의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는
$m \geq -2$
$D/4=(m+2)^2-4(m+2)<0$이므로
$m^2+4m+4-4m-8=m^2-4<0$
따라서 $-2 \leq m<2$이므로
만족하는 정수 m의 개수는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1$의 4개

15. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 다음 그림과 같을 때, 부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해를 구하면?



① $-2 < x < 4$ ② $-2 < x < 3$

③ $0 < x < 4$ ④ $2 < x < 3$

⑤ $3 < x < 4$

해설

부등식 $f(x) > g(x)$ 의 해는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 직선 $y = g(x)$ 보다
위쪽에 있는 x 의 구간을 의미하므로
구하는 해는 $0 < x < 4$

16. $P = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$P = (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)$

$= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$= \quad \vdots$

$= (2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$= 2^{32}-1$

17. $(x^3+2x^2-3x+2)^4(2x-1)^7$ 을 전개했을 때, 모든 계수들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(x^3+2x^2-3x+2)^4 \cdot (2x-1)^7$
$= a_0x^{19}+a_1x^{18}+a_2x^{17}+\cdots+a_{19}$ 로 놓으면
계수들의 총합 $a_0+a_1+\cdots+a_{19}$ 는 양변에 $x=1$ 을 대입한 결과와 같으므로 항등식의 성질에서
$(1+2-3+2)^4 \cdot (2-1)^7 = 2^4 = 16$

18. 복소수 z 가 $z+\frac{1}{z}=2i$ 를 만족할 때, $z^4+\frac{1}{z^4}$ 의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 8 ③ 20 ④ 32 ⑤ 34

해설

$\left(z+\frac{1}{z}\right)=2i$, $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=-4$

$z^2+\frac{1}{z^2}+2=-4$, $z^2+\frac{1}{z^2}=-6$

$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2=36$, $z^4+\frac{1}{z^4}=36-2=34$

19. 이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는 x축과 만나고, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. 이때, 정수 k의 개수는?

① 5개　② 6개　③ 7개　④ 8개　⑤ 9개

해설

이차함수 $y = x^2 + 2kx + 1$의 그래프는
x축과 만나므로
$x^2 + 2kx + 1 = 0$의 판별식을 D_1이라 할 때,
$\frac{D_1}{4} = k^2 - 1 \geq 0,\quad (k+1)(k-1) \geq 0$
$\therefore\ k \leq -1$ 또는 $k \geq 1 \cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y = -x^2 + kx + 2k$의 그래프는
x축과 만나지 않으므로
$-x^2 + kx + 2k = 0$의 판별식을 D_2라 할 때,
$D_2 = k^2 + 8k < 0,\quad k(k+8) < 0$
$\therefore\ -8 < k < 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위를 구하면 $-8 < k \leq -1$
따라서 정수 k는 $-7, -6, \cdots, -2, -1$의 7개이다.

20. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때 최대이고 최댓값은 16 이다. 또, 그래프가 x 축과 만나는 두 점을 A, B 라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 8$ 이다. 이 때, $|a| + |b| + |c|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 1$ 일 때
최대이고 최댓값은 16 이므로
$y = ax^2 + bx + c = a(x-1)^2 + 16 = ax^2 - 2ax + a + 16\ (a < 0)$
$\therefore b = -2a,\ c = a + 16(a < 0) \cdots\cdots$ ㉠
$ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 하면
$\overline{\mathrm{AB}} = |\beta - \alpha| = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} \cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $\dfrac{\sqrt{4a^2 - 4a(a+16)}}{-a} = 8$
$\therefore \sqrt{-64a} = -8a$ 양변을 제곱하면
$-64a = 64a^2,\ \ a^2 = -a,\ a(a+1) = 0$
그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -1$
$\therefore b = -2a = 2,\ c = a + 16 = 15$
$\therefore |a| + |b| + |c| = 18$

21. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$
$= -(x-1)^2 - (y-2)^2 + 8$
$x,\ y$는 실수이므로 $(x-1)^2 \geq 0,\ (y-2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은
$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

22. $\begin{cases} x^2-(y+1)^2=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은?

① -10　② -7　③ -3　④ 0　⑤ 5

해설

$\begin{cases} x^2-(y+1)^2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=25 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡식 $x^2=25-y^2$을

㉠식에 대입하면

$25-y^2-(y+1)^2=0$

$25-y^2-(y^2+2y+1)=0$

$-2y^2-2y+24=0,\ y^2+y-12=0,$

$(y+4)(y-3)=0,$

$\therefore\ y=-4,\ 3$

ⅰ) $y=-4, x=\pm3$

$\rightarrow \alpha+\beta=3-4=1, -3-4=-7$

ⅱ) $y=3, x=\pm4$

$\rightarrow \alpha+\beta=4+3=7, -4+3=-1$

23. 방정식 $2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 을 만족시키는 실수 $x,\ y$ 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 에서
$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$
$(x+y)^2+(x-2)^2=0$
$x,\ y$가 실수이므로 $x+y=0,\ x-2=0$
$\therefore\ x=2,\ y=-2$
$\therefore\ xy=-4$

24. 부등식 $|x|+|x-2| \le 3$을 풀면 $m \le x \le n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 2

해설

i) $x < 0$일 때

$-x-x+2-3 \le 0$

$-2x \le 1$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le x < 0$

ii) $0 \le x < 2$일 때

$x-x+2 \le 3$

$\therefore\ 0 \le x < 2$

iii) $x \ge 2$일 때

$2x-2 \le 3$

$2x \le 5$

$\therefore\ 2 \le x \le \frac{5}{2}$

i), ii), iii)에서 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

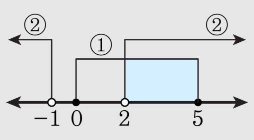
$\therefore m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{5}{2},\ m+n = 2$

25. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x-5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.