

1. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right) = a+bi$ 를 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b = 9$

해설

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)} \\&= \frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2} \\&= \frac{6-7i}{3} = 2 - \frac{7}{3}i \text{ 이므로}\end{aligned}$$

$$2 - \frac{7}{3}i = a + bi$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a = 2, b = -\frac{7}{3}$$

$$\therefore a - 3b = 2 - 3 \times \left(-\frac{7}{3}\right) = 2 + 7 = 9$$

2. 이차방정식 $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 해를 구하기 위해 완전제곱식으로 고쳐 $(x+a)^2 = b$ 를 얻었다. 이때, 상수 a, b 에 대하여 $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$x^2 + 2x + 3 = 0$ 를 완전제곱식으로 고치면

$$(x^2 + 2x + 1) + 2 = 0, \quad (x+1)^2 = -2$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -2$$

$$\therefore a - b = 3$$

3. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

4. 길이가 6인 선분을 같은 방향으로 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6인 선분을 OA 라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A의 좌표는 (6, 0)
이 선분을 2 : 1로 내분하는 점 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2 : 1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $PQ = 12 - 4 = 8$

5. 두 직선 $ax + by + c = 0$, $cx + ay + b = 0$ 이 일치할 때, 이 직선과
평행하며, 점 $(2, 1)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

- ① $x - y = 1$
- ② $2x + y = 5$
- ③ $2x - y = 3$
- ④ $x + 2y = 5$
- ⑤ $x + y = 3$

해설

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow$$
$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{1}$$
$$cx + ay + b = 0 \Rightarrow$$
$$y = -\frac{c}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{2}$$
$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{이 일치하므로 } -\frac{a}{b} = -\frac{c}{a}, -\frac{c}{b} = -\frac{b}{a}$$
$$a^2 = bc, b^2 = ac$$
$$\therefore c = \frac{a^2}{b}, c = \frac{b^2}{a}$$
$$\therefore \frac{a^2}{b} = \frac{b^2}{a}$$
$$\therefore a^3 = b^3 \Rightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0$$
$$\therefore a = b \text{ (} \because a^2 + ab + b^2 \neq 0 \text{)}$$
$$\therefore c = \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{a} = a$$
$$\therefore a = b = c$$
$$\therefore \textcircled{1} : x + y + 1 = 0, y = -x - 1$$
$$\therefore \text{구하는 직선의 기울기} : -1$$
$$\therefore \text{구하는 직선} : y - 1 = (-1)(x - 2)$$
$$\Rightarrow x + y - 3 = 0$$

6. 두 직선 $3x-2y-4=0$, $x+2y-4=0$ 의 교점과 점 $(1, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

① $5x-y-9=0$

② $5x+y-9=0$

③ $x-2y-1=0$

④ $2x-3y-1=0$

⑤ $2x-y+3=0$

해설

$$\begin{cases} 3x-2y-4=0 \cdots \textcircled{1} \\ x+2y-4=0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} : x=2, y=1$$

$$\therefore \text{교점} : (2, 1)$$

$$\therefore \text{구하는 직선은 } y-1 = \frac{-4-1}{1-2}(x-2) = 5(x-2)$$

$$\therefore 5x-y-9=0$$

7. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

(0,0), (2,6), (6,3)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

8. 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 의 중심이 $(4,-2)$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

원의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심이 $(4,-2)$ 이므로

$$(x-4)^2+(y+2)^2=r^2$$

$$x^2+y^2-8x+4y+20-r^2=0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이때, 원 $\textcircled{1}$ 과 원 $x^2+y^2-2kx+ky+3k=0$ 이 같으므로

$$-2k=-8, \quad k=4$$

$$3k=20-r^2$$

$$\therefore k=4, \quad r=2\sqrt{2} (\because r>0)$$

따라서, 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$

9. $x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 2 인 직선의 방정식을 구하면?

- ① $y = x \pm \sqrt{5}$ ② $y = 2x \pm 3\sqrt{5}$ ③ $y = 4x \pm 2\sqrt{5}$
④ $y = 5x \pm 5\sqrt{5}$ ⑤ $y = x \pm 2\sqrt{5}$

해설

구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x \pm 3\sqrt{1+2^2} \leftarrow m = 2, r = 3$$

$$\therefore y = 2x \pm 3\sqrt{5}$$

10. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x + y + z = 1$ 에서

$x + y = 1 - z$

$y + z = 1 - x$

$z + x = 1 - y$

$(x + y)(y + z)(z + x) = (1 - z)(1 - x)(1 - y)$

$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$

$= 1 - 1 + 2 - 3 = -1$

11. 다음 ㉠~㉤중 인수분해를 한 결과가 틀린 것은 모두 몇 개인가?

- ㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=(a-b)(x+y)(x-y)$
- ㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x-2y)(3x+y)$
- ㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2-5x+25)$
- ㉤ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2=(2x-y+2)(x-y+1)$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=x^2(a-b)+y^2(a-b)=(a-b)(x^2+y^2)$

㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x+2y)(3x-y)$

㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2+5x+25)$

㉤ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2$
 $=2x^2-(4+y)x-(y^2-y-2)$
 $=2x^2-(4+y)x-(y-2)(y+1)$
 $=\{2x+(y-2)\}\{x-(y+1)\}$
 $=(2x+y-2)(x-y-1)$

12. $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ 을 바르게 인수분해 한 것을 찾으려면?

① $(x^2 + 1)(x + 3)(x + 1)$ ② $(x^2 + 1)(x + 3)(x - 1)$

③ $(x^2 + 1)(x - 3)(x - 1)$ ④ $(x^2 - 3)(x - 1)(x + 1)$

⑤ $(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)$

해설

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3$ 라 하면

$f(1) = 0, f(3) = 0$ 이므로

$f(x)$ 는 $x - 1, x + 3$ 로 나누어떨어진다.

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 \\ &= (x^2 + 1)(x + 3)(x - 1)\end{aligned}$$

13. 가로 길이가 x cm, 세로 길이가 y cm, 높이가 z cm 인 직육면체에서 $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 + z^2 = 46$ 일 때, 이 직육면체의 겉넓이는 몇 cm^2 인가?

- ① 45 cm^2 ② 50 cm^2 ③ 54 cm^2
④ 58 cm^2 ⑤ 60 cm^2

해설

공식 $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ 을 이용하여
주어진 조건을 대입하면 $xy + yz + zx = 27$
겉넓이는 $2(xy + yz + zx)$ 이므로 54

14. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \text{ 에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4이다.

15. $a = 1 + i$, $b = 1 - i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$

② $-\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$a^2 = (1 + i)^2 = 2i, \quad b^2 = (1 - i)^2 = -2i,$$

$$ab = (1 + i)(1 - i) = 2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2 &= \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2b^2} \\ &= \frac{-2i + 2 + 2i}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

16. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \beta = 6$ 이 성립한다.
이 때, 방정식 $f(5x - 7) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0, \quad (a \neq 0) \text{에서}$$

$$f(5x - 7) = a(5x - 7 - \alpha)(5x - 7 - \beta) = 0$$

$$\therefore 5x = 7 + \alpha, \quad 5x = 7 + \beta$$

$$x = \frac{7 + \alpha}{5}, \quad \frac{7 + \beta}{5}$$

따라서, 구하는 두 근의 합은

$$\frac{14 + \alpha + \beta}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

17. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{2007} + 1 = a_0 + a_1(x+4) + a_2(x+4)^2 + \cdots + a_{2007}(x+4)^{2007}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값은?

- ① $(-3)^{2007} + 1$ ② 0 ③ $3^{2007} + 1$
④ 1 ⑤ $3^{2007} + 3$

해설

양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$(-3)^{2007} + 1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{2007}$$

18. 복소수 $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수)에 대하여 $\alpha^* = b + ai$ 로 나타낸 다. $\alpha = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5\alpha^5(\alpha^*)^4$ 의 값을 구하면?

① $4 + 3i$

② $3 + 3i$

③ $2 + 3i$

④ $1 + 3i$

⑤ $-1 + 3i$

해설

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^* &= (a+bi)(b+ai) \\ &= ab+a^2i+b^2i-ab=(a^2+b^2)i \\ \alpha &= \frac{4+3i}{5} \text{ 이므로 } \alpha\alpha^* = \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\} i = i \\ \therefore 5\alpha^5(\alpha^*)^4 &= 5\alpha(\alpha\cdot\alpha^*)^4 \\ &= 5\cdot\frac{4+3i}{5}\cdot i^4 \\ &= 4+3i\end{aligned}$$

19. 원점과 직선 $2x - y - 5 + k(x + 2y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\frac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

- ㉠ $\frac{1}{5}$ ㉡ $\frac{2}{5}$ ㉢ $\frac{3}{5}$ ㉣ $\frac{4}{5}$ ㉤ 1

해설

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

원점과 직선 $(2+k)x + (2k-1)y - 5 = 0$ 사이의 거리

$$f(k) \text{ 는 } f(k) = \frac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2 + (2k-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5(1+k^2)}}$$

$$\therefore \frac{1}{\{f(k)\}^2} = \frac{k^2 + 1}{5}$$

따라서, $k = 0$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{\{f(0)\}^2} = \frac{1}{5}$ 이다.

20. 두 점 A(1, 0), B(4, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π ② $2\sqrt{3}\pi$ ③ 4π ④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을
지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$$\Rightarrow \text{내분점은 } \left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}, 0 \right) = (3, 0)$$

$$\Rightarrow \text{외분점은 } \left(\frac{2 \times 4 - 1 \times 1}{2 - 1}, 0 \right) = (7, 0)$$

$\therefore$ 중심은 (5, 0) 이고, 반지름은 2 인 원

$$\Rightarrow \text{둘레의 길이는 } 2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

21. A(1, 5), B(7, -1), P(x, y) 에 대하여 $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 임을 만족하는 자취 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 1$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 10$

④ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 12$

⑤ $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$

해설

$$\overline{AP} \text{의 기울기} : \frac{y-5}{x-1}$$

$$\overline{BP} \text{의 기울기} : \frac{y+1}{x-7}$$

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\Rightarrow \frac{y-5}{x-1} \times \frac{y+1}{x-7} = -1$$

$$\Rightarrow y^2 - 4y - 5 = -x^2 + 8x - 7$$

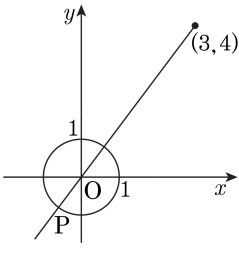
$$\Rightarrow (x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$$

22. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 $\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 의 최댓값은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ $1 + \sqrt{5}$
- ⑤ $2(1 + \sqrt{5})$

해설

$\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 은 두 점 (a, b) , $(3, 4)$ 사이의 거리이고 점 (a, b) 는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로 $\sqrt{(a-3)^2 + (b-4)^2}$ 의 값이 최대인 경우는 점 P 의 위치가 그림과 같을 때이다. 원의 중심 $(0, 0)$ 과 $(3, 4)$ 의 거리는 5 이므로 최댓값은 $5 + 1 = 6$



23. A 를 B 로 나눈 몫을 Q , 나머지를 R 라 하고, Q 를 B' 으로 나눈 몫은 Q' , 나머지는 R' 이라 한다. A 를 BB' 으로 나눈 나머지는? (단, 모든 문자는 자연수이다.)

- ① $R + R'B$
- ② $R' + RB$
- ③ RR'
- ④ R
- ⑤ R'

해설

주어진 조건을 식으로 나타내면
 $A = BQ + R \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $Q = B'Q' + R' \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $A = B(B'Q' + R') + R$
 $= (BB')Q' + (R + R'B)$
 $R + R'B$ 가 A 를 BB' 로 나눈 나머지가 되기 위해서는 $R + R'B < BB'$ 이어야 한다.
그런데 $R \leq B - 1, R' \leq B' - 1$ 이므로
 $R + R'B \leq (B - 1) + (B' - 1)B$
 $= BB' - 1 < BB'$
따라서 A 를 BB' 으로 나눈 나머지는 $R + R'B$ 이다.

24. 다항식 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ 이 성립할 때, $2a - b + 2c - d$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$f(0) = 1$ 이므로 $d = 1$
 $f(1) = 0$ 이므로 $a + b + c = -1 \dots ①$
 $f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 2x$ 에서
 $x = -1$ 을 대입하면 $f(-1) = 0$ 이므로
 $-a + b - c = -1 \dots ②$
 $x = 0$ 을 대입하면 $f(2) = -1$ 이므로
 $8a + 4b + 2c = -2 \dots ③$
①, ②, ③을 연립하여 풀면
 $\therefore a = \frac{1}{3}, b = -1, c = -\frac{1}{3}, d = 1$
 $\therefore 2a - b + 2c - d = 0$

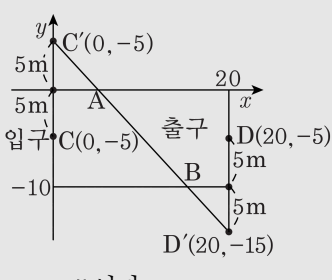
25. 다음 그림과 같은 전시장에서 관광객이 전시물을 보기 위한 이동 거리를 최소로 하려한다. 전시물 A, B가 있을 때, 전시물 A의 위치는 왼쪽에서 몇 m 떨어져 있어야 하는지 구하여라. (단, 이 전시장은 가로 20m, 세로 10m인 직사각형 모양이다.)
-

▶ 답: m

▶ 정답 : 5m

해설

전시장의 입구를 점 $C(0, -5)$, 출구를 점 $D(20, -5)$ 라 하자. 점 $C(0, -5)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $C'(0, 5)$ 점 $D(20, -5)$ 를 직선 $y = -10$ 에 대해 대칭이동한 점은 $D'(20, -15)$ 이다.



이 때, 직선 $C'D'$ 의 방정식은 $y = -x + 5$ 이다.

점 A의 좌표는 직선 C'D'이 x 축과 만나는 점이므로 (5, 0)이다.

따라서, 왼쪽에서 5m 떨어진 곳에 전시물 A가 위치해야 한다.