

1. $f(x) = x^2 - ax + 1$ 이 $x - 1$ 로 나누어 떨어질 때 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

2. $x^3 - 4x^2 + x + 6$ 을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$ 이다. $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ 이라 놓으면,
 $x = -1$ 일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$ 는 $(x+1)$ 의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$ 몫
 $Q(x)$ 는 조립제법으로 구한다.

-1		1	-4	1	6	
			-1	5	-6	
		1	-5	6	0	

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$
 $\therefore f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

3. 이차식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4$ 가 x 에 대하여 완전제곱식이 될 때, 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차식이 완전제곱식이 되면

이차방정식 $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 - 6k + 4 = 0$

이 중근을 갖는다.

따라서, $\frac{D}{4} = (k-1)^2 - (2k^2 - 6k + 4) = 0$

위의 식을 정리하면

$-k^2 + 4k - 3 = 0$

$k^2 - 4k + 3 = 0$

$(k-1)(k-3) = 0$ 에서

$k = 1$ 또는 $k = 3$

4. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(3, a), C(4, 2)에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{BC} &\text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 이므로} \\ (3-2)^2 + (a-0)^2 &= (4-3)^2 + (2-a)^2 \\ 1 + a^2 &= 1 + 4 - 4a + a^2 \\ 4a &= 4 \quad \therefore a = 1\end{aligned}$$

5. 두 점 $A(-1, 2)$, $B(a, b)$ 를 이은 선분 AB 를 $2 : 3$ 으로 외분하는 점의 좌표가 $(-13, 12)$ 일 때, a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A(-1, 2)$, $B(a, b)$ 에서

선분 AB 를 $2 : 3$ 으로 외분하는 점은

$$\left(\frac{2a - 3 \cdot (-1)}{2 - 3}, \frac{2b - 3 \cdot 2}{2 - 3} \right)$$

$= (-2a - 3, -2b + 6) = (-13, 12)$ 이므로

$$-2a - 3 = -13, -2b + 6 = 12$$

$$\therefore a = 5, b = -3$$

6. 좌표평면 위의 점 A(3, -2), B(4, 5), C(-1, 3)을 세 꼭짓점으로 하는
평행사변형 ABCD의 나머지 꼭짓점 D의 좌표를 (x, y)라 할 때 x+y
의 값을 구하여라.

▶ 답 :

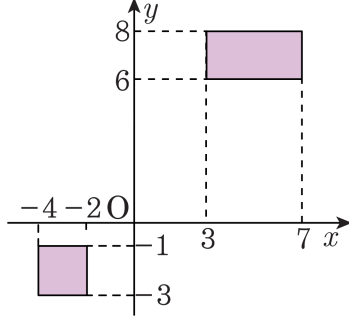
▷ 정답 : -6

해설

□ABCD는 평행사변형이므로
대각선 AC의 중점과 대각선 BD의 중점이 일치한다.
점 D의 좌표를 (x, y)라고 하면
$$\left(\frac{3+(-1)}{2}, \frac{-2+3}{2}\right) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$$
$$\therefore x = -2, y = -4$$

따라서 점 D의 좌표는 (-2, -4)

7. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 정사각형과 직사각형이 놓여 있다. 이 정사각형과 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선의 기울기는?



- ① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{9}{8}$ ③ $\frac{8}{7}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

해설

직사각형 ABCD 에서 두 대각선의 교점을 M이라 하자.
 점 M을 지나는 임의의 직선 l 이 직사각형과 만나는 점을 각각 P, Q 라 하면
 l 의 기울기에 관계없이 $\triangle BMQ = \triangle DMP$ 이므로,
 M을 지나는 임의의 직선은 직사각형의 넓이를 이등분한다.
 정사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(-3, -2)$
 직사각형의 두 대각선의 교점의 좌표는 $(5, 7)$ 이므로
 두 점을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{7 - (-2)}{5 - (-3)} = \frac{9}{8}$$

8. 두 직선 $3x - 2y + 1 = 0$, $ax + 4y - 3 = 0$ 이 평행할 때의 a 값과 수직일 때 a 값의 곱은?

① -16 ② -12 ③ -8 ④ -4 ⑤ -1

해설

$$3x - 2y + 1 = 0 \text{ 에서 } y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$ax + 4y - 3 = 0 \text{ 에서 } y = -\frac{a}{4}x + \frac{3}{4} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 이 평행일 때, } \frac{3}{2} = -\frac{a}{4} \quad \therefore a = -6$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 이 수직일 때, } \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{a}{4}\right) = -1 \quad \therefore a = \frac{8}{3}$$

$$\therefore (-6) \times \frac{8}{3} = -16$$

9. 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2, 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면

제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면

중심이 (r, r) 이다.

$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고

또한 $(2, 1)$ 을 지나므로

$(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,

$(r-1)(r-5) = 0$

$\therefore r = 1$ 또는 5

$\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$

$\therefore 1 + 5 = 6$

10. $x^3 + x^2 + 2$ 를 다항식 $x^2 + 2x - 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $Q(x) + R(x)$ 의 값은?

① $2x - 3$

② $2x$

③ $3x + 2$

④ $4x$

⑤ $4x + 1$

해설

$x^3 + x^2 + 2$ 를 $x^2 + 2x - 1$ 로 직접 나누면

$$Q(x) = x - 1, \quad R(x) = 3x + 1$$

$$\therefore Q(x) + R(x) = 4x$$

11. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

- ㉠ $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

㉡ $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

㉢ $(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1) = x^4 + x + 1$

㉣ $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

㉤ $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉣ ⑤ ㉤

해설

㉢ $x + 1 = A$ 로 치환하여 전개하면
 $(x^2 + A)(x^2 - A) = x^4 - A^2 = x^4 - x^2 - 2x - 1$

12. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - kx - 2k = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하자. $\alpha^2 = 6 + 2\sqrt{5}$ (단, $\alpha > 0$)일 때, 유리수 k 의 값은?

① -12

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 12

해설

$$x^2 - kx - 2k = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta$$

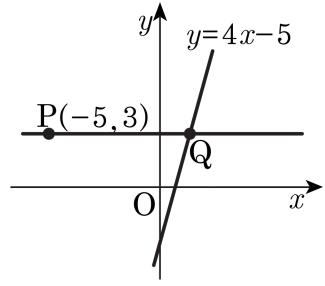
$$\alpha + \beta = k, \alpha\beta = -2k$$

$$\alpha^2 = 6 + 2\sqrt{5}, \alpha = \sqrt{5} + 1$$

$$\text{한 근이 } 1 + \sqrt{5} \text{이면 } \beta \text{는 } 1 - \sqrt{5}$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2 = k$$

13. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(-5, 3)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{PQ}$ 의 길이는?



- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

점 P 를 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.
점 Q 의 y 좌표가 3이므로

$$y = 4x - 5 \text{에 } y = 3 \text{을 대입하면 } 3 = 4x - 5$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 점 Q 의 좌표는 $(2, 3)$ 이다.

$$\therefore \overline{PQ} = 2 - (-5) = 7$$

14. A (1, 1), B (-2, -3), C ($k, k + 1$)이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
 $\overline{AB}$ 와 $\overline{BC}$ 의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$$\Rightarrow \therefore k = 4$$

15. $(1, 2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선 중 y 축에 평행하지 않는 직선의 방정식은?

① $3x + 4y + 5 = 0$

② $3x + 4y - 5 = 0$

③ $3x - 4y + 5 = 0$

④ $3x - 4y - 5 = 0$

⑤ $3x + y + 1 = 0$

해설

점 $(1, 2)$ 를 지나는 접선의 기울기를 m 이라 하면

$$y = m(x - 1) + 2 \quad \cdots \text{㉠}$$

㉠과 원 중심사이 거리는 반지름과 같으므로

$$\frac{|-m + 2|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1$$

$$(m - 2)^2 = m^2 + 1$$

$$m = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{접선의 방정식은 } y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}, \quad 3x - 4y + 5 = 0$$

16. 점 A(2, 4)와 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 임의의 점 P를 이은 선분 AP의 중점의 자취의 길이는?

- ① $\frac{\pi}{2}$
- ② π
- ③ $\frac{3}{2}\pi$
- ④ 2π
- ⑤ 3π

해설

원 위의 점을 $P(a, b)$, 선분 AP의 중점을 $Q(x, y)$ 라 하면
$$x = \frac{2+a}{2}, y = \frac{4+b}{2}$$
$$\therefore a = 2(x-1), b = 2(y-2) \quad \cdots \textcircled{㉠}$$
이 때 $P(a, b)$ 가 원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 위의 점이므로
$$a^2 + b^2 - 4a - 2b + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$
 $\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
$$4(x-1)^2 + 4(y-2)^2 - 8(x-1) - 4(y-2) + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x - 5y + \frac{37}{4} = 0$$
$$\therefore (x-2)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 1$$
따라서 점 Q의 자취는 중심의 좌표가 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$ 이고, 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는
 $2\pi \doteq 2\pi$

17. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14 (x > 0)$ 일 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값은?

① 36

② 44

③ 52

④ 68

⑤ 82

해설

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \circ \text{므로}$$

$$x + \frac{1}{x} = 4 \quad (\because x > 0)$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = 52$$

18. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ 를 만족할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 8 ② 16 ③ 24 ④ 36 ⑤ 42

해설

공식 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ 에 주어진 수를 대입하여

$(ab + bc + ca)$ 의 값을 구하면 $(ab + bc + ca) = 12$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 에서

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ 이므로

$\frac{1}{2} \{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \} = 0$

$\therefore a = b = c = 2$ 이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 24$

19. x 에 대한 삼차식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + 8$ 은 $(x + 2)^2$ 으로 나누어 떨어지고, $1 - f(x)$ 는 $x^2 - 1$ 로 나누어 떨어질 때, $f(x)$ 의 상수항은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$f(x) + 8 = (x + 2)^2(ax + b) \cdots \textcircled{1}$$

$$1 - f(x) = (x^2 - 1)Q(x) \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}\text{에서 } f(1) = 1, f(-1) = 1$$

그러므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$1 + 8 = 9(a + b) \cdots \textcircled{3}$$

$$1 + 8 = -a + b \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4}\text{에서 } a = -4, b = 5$$

$$\therefore f(x) = (x + 2)^2(-4x + 5) - 8$$

$$\therefore \text{상수항은 } f(0) = 2^2 \cdot 5 - 8 = 12$$

20. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

- ㉠ $f(z) \geq 0$
- ㉡ $f(z+w) = f(z) + f(w)$
- ㉢ $f(zw) = f(z)f(w)$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉢
- ④ ㉠, ㉡
- ⑤ ㉠, ㉢

해설

- ㉠ $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면
 $f(z) = z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$
- ㉡ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$
 $= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$
 $\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$
- ㉢ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z} \bar{w}$
 $= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

21. 두 원 $(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-2)^2 + (y-a)^2 = 4$ 이 직교할 때 a 의 값의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 원의 중심이 각각 $(a, 1)$, $(2, a)$ 이므로
두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(a-2)^2 + (1-a)^2}$ 이다.
두 원의 반지름은 각각 1, 2이므로
직교하기 위한 조건은
 $(a-2)^2 + (1-a)^2 = 1^2 + 2^2$
 $\therefore a^2 - 3a = 0$
근과 계수와의 관계로부터 두 근의 합은 3

22. 두 점 A(1, 0), B(4, 0)으로부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

주어진 조건에서 $\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{BP}$

$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$(x-1)^2 + y^2 = 4\{(x-4)^2 + y^2\}$

$\therefore (x-5)^2 + y^2 = 4$

따라서 점 P는 중심이 (5, 0)이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.

그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선

의 발을

H라 하면 $\overline{PH}$ 의 길이가

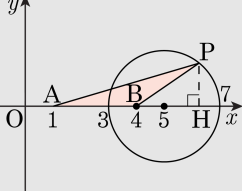
반지름의 길이와 같을 때 삼각형 PAB

의 넓이가

최대가 되므로 $\Delta PAB = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PH} \leq$

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은 3이다.



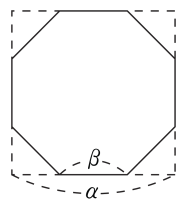
23. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(1 - \alpha)(1 - \beta) + (2 - \alpha)(2 - \beta) + \cdots + (5 - \alpha)(5 - \beta)$ 의 값을 구하면?

- ① 50
- ② 40
- ③ 10
- ④ 30
- ⑤ 20

해설

$$\begin{aligned} &x^2 - 2x - 1 = 0 \text{의 두 근이 } \alpha, \beta \text{이므로} \\ &\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1 \\ &\therefore (1 - \alpha)(1 - \beta) + (2 - \alpha)(2 - \beta) + \cdots + (5 - \alpha)(5 - \beta) \\ &= (1 - (\alpha + \beta) + \alpha\beta) + (4 - 2(\alpha + \beta) + \alpha\beta) + \cdots + \\ &\quad (25 - 5(\alpha + \beta) + \alpha\beta) \\ &= (1 + 4 + 9 + 16 + 25) - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)(\alpha + \beta) + 5\alpha\beta \\ &= 55 - 15 \times 2 - 5 = 55 - 30 - 5 = 20 \end{aligned}$$

24. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 α 인 정사각형의 네 귀퉁이를 잘라 정8각형을 만들고 그 한 변의 길이를 β 라 하면, α, β 는 이차방정식 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이 된다고 한다. 다음 중 α, p 의 값으로 옳은 것은?



- ① $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = \sqrt{2} - 1$
 ② $\alpha = \sqrt{2}, \quad p = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$
 ③ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2}$
 ④ $\alpha = \sqrt{2} + 1, \quad p = -\sqrt{2} - 2$
 ⑤ $\alpha = \sqrt{2} - 1, \quad p = -\sqrt{2} - 1$

해설

잘라낸 귀퉁이는 빗변의 길이가 β 인 직각이등변삼각형이므로 다른 한 변의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}\beta$ 이다.

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}\beta + \beta = \alpha \text{ 이므로}$$

$$\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{2} + 1} = (\sqrt{2} - 1)\alpha$$

α, β 는 $x^2 + px + (\sqrt{2} + 1) = 0$ 의 두 근이므로

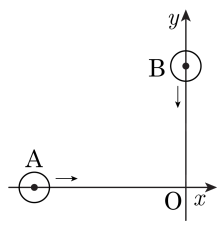
$$\alpha\beta = (\sqrt{2} - 1)\alpha^2 = \sqrt{2} + 1 \text{ 에서}$$

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

$$\alpha > 0 \text{ 이므로 } \alpha = \sqrt{2} + 1$$

$$\therefore p = -(\alpha + \beta) = -\{\alpha + (\sqrt{2} - 1)\alpha\} = -\sqrt{2} - 2$$

25. 반지름이 1 인 두 원 A, B 가 현재 아래 그림의 위치에 있고, A 의 중심 $(-10, 0)$ 은 x 축 위를 왼쪽에서 오른쪽으로, B 의 중심 $(0, 8)$ 은 y 축 위를 위에서 아래로 매초 1 의 속도로 움직일 때, 원 A, B 가 최초로 접할 때와 두 번째 접할 때 각각의 시간은?



- ① $t = 2, 4$ ② $t = 4, 6$ ③ $t = 8, 10$
 ④ $t = 12, 14$ ⑤ $t = 16, 18$

해설

t 초 후 $A(-10+t, 0)$, $B(0, 8-t)$ 에 위치.
 t 초 후의 두 원의 중심 사이의 거리를 d 라 하면
 $d^2 = (8-t)^2 + (10-t)^2 = 2t^2 - 36t + 164$
 접하는 경우는 두 원의 중심 사이의 거리가
 두 원의 반지름의 합과 같을 때이므로,
 $\sqrt{(8-t)^2 + (10-t)^2} = \sqrt{2t^2 - 36t + 164} = 2$
 $\therefore 2t^2 - 36t + 160 = 0$
 $\therefore t^2 - 18t + 80 = 0$
 $\therefore t = 8, 10$