

1. 등식 $x + y + (x - 2y)i = 1 + 7i$ 을 만족하는 두 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 3

② -3

③ 6

④ -6

⑤ 8

해설

복소수의 상등에 의하여

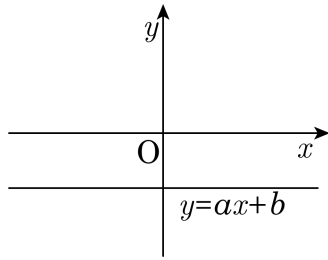
$$x + y = 1, x - 2y = 7$$

$$x = 3, y = -2$$

$$\therefore xy = -6$$

2. 다음 그림과 같이 $y = ax + b$ 의 그래프가 x 축에 평행인 직선일 때, $y = bx + a - 2$ 의 그래프가 반드시 지나는 사분면을 모두 고르면?

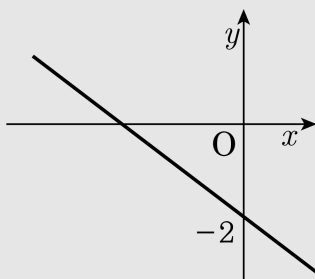
- | | |
|---------|---------|
| ㉠ 제1사분면 | ㉡ 제2사분면 |
| ㉢ 제3사분면 | ㉣ 제4사분면 |



- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉠, ㉡, ㉣
 ④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣, ㉣

해설

주어진 직선 $y = ax + b$ 의 그래프가 x 축과 평행하면서 x 축 아래쪽에 놓여 있으므로 $a = 0$, $b < 0$ 이다.
 이 때, $y = bx + a - 2$ 에서
 기울기: $b < 0$, y 절편: $a - 2 = -2 < 0$ 이므로
 직선 $y = bx + a - 2$ 의 그래프는
 다음 그림과 같다.
 따라서 이 직선의 그래프가 반드시 지나는
 사분면은 제 2, 3, 4사분면이다.



3. 다항식 $2x^3 + x^2 + 3x$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지는?

① $x - 1$

② x

③ 1

④ $x + 3$

⑤ $3x - 1$

해설

직접 나누어보면

$$(2x + 1) + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

몫 : $2x + 1$, 나머지 : $x - 1$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ 일 때, $f(x) - 2 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$ 가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ 이므로
 $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$
 $= x^3 + (-a + b)x^2 + (a - 1)x - b \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 이 x 에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a + b = -3, a - 1 = 3, b = 1$
이므로 $a = 4, b = 1$
 $\therefore a + b = 5$

5. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 의 값은?

- ① $a = 1, b = 2$ ② $a = 0, b = 3$ ③ $a = -1, b = 2$
④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 판별식이 0이다.

$$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, \quad a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

6. A (4, 7), B (3, 2), C (5, 3), D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행 사변형일 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$$\therefore x+3=9, y+2=10$$

$$\therefore x=6, y=8$$

7. 두 점 A(1, 2), B(-3, 4) 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 -1 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은 ?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(1, 2), B(-3, 4) 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$$\therefore a = \frac{2-4}{1-(-3)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

또, y 절편이 -1 이므로 $b = -1$

$$\therefore a + b = -\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$$

8. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \text{ 을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

9. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $abc = -1$ 일 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \\ ab + bc + ca &= -1 \\ a^3 + b^3 + c^3 \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc \\ &= 2 \times (6 - (-1)) - 3 = 11\end{aligned}$$

10. 다항식 $f(x)$ 를 $x-3, x-4$ 로 나눈 나머지가 각각 3, 2이고, 다항식 $f(x+1)$ 을 x^2-5x+6 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(3) = 3, f(4) = 2$
 $R(x) = ax + b$ 라 하면
 $f(x+1) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$
 $x = 2$ 대입,
 $f(3) = 2a + b = 3$
 $x = 3$ 대입,
 $f(4) = 3a + b = 2$
 $a = -1, b = 5$
 $R(x) = -x + 5,$
 $R(1) = -1 + 5 = 4$

11. $\frac{2012^3 + 1}{2012 \times 2011 + 1}$ 의 값을 a 라 할 때, $\frac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1007}{1006}$

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)} \\ &= 2013 \text{ 이므로} \\ \therefore \frac{a+1}{a-1} &= \frac{2013+1}{2013-1} = \frac{2014}{2012} = \frac{1007}{1006} \end{aligned}$$

12. $x = 1001$ 일 때, $\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4 + 1)(x^2 - 1)}{(x^4 + 1)(x + 1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

13. 다음 중 옳은 것은?

① $(1 + \sqrt{-1})^3 = 2i + 4$

② $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2 + 2i$

② $-2i$

③ -3

④ $-5\sqrt{5}i$

14. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$ 의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 $n, n + 1$ 이라 하면

$$\begin{cases} n + (n + 1) = a \cdots \cdots \textcircled{A} \\ n(n + 1) = a + 1 \cdots \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } n = \frac{a - 1}{2} \cdots \cdots \textcircled{C}$$

$\textcircled{C}$ 을 $\textcircled{B}$ 에 대입하면

$$\frac{a - 1}{2} \left(\frac{a - 1}{2} + 1 \right) = a + 1$$

이것을 정리하면 $(a + 1)(a - 5) = 0$

$$a = -1, 5$$

$$\therefore -1 + 5 = 4$$

15. 점 A(1, 2)와 B(-1, -2)를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

- ① $C(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ② $C(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ③ $C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ④ $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- ⑤ $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$
점 C의 좌표를 (x, y)라 하면, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y+2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 + 2x + y^2 + 4y = 15 \dots\dots \textcircled{1}$
 $\overline{AB} = \overline{CA}$ 에서
 $\sqrt{(1+1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면
 $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 15 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 에서 $x + 2y = 0$
 $\therefore x = -2y$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $4y^2 - 4y + y^2 + 4y = 15$
 $\therefore y^2 = 3$
 $\therefore y = \pm\sqrt{3}$
따라서 $x = \mp 2\sqrt{3}$ (복호동순)
 $\therefore C(2\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$

16. 두 점 A(2, -1), B(6, 3) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P, y 축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle OPQ$ 의 외심의 좌표를 (x , y)라 할 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P(a , 0), Q(0, b)라 하면

$$(2-a)^2 + (-1-0)^2 = (6-a)^2 + (3-0)^2 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(2-0)^2 + (-1-b)^2 = (6-0)^2 + (3-b)^2 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $a = 5$, ㉡에서 $b = 5$

$\triangle OPQ$ 의 외심을 (x , y)라 하면

$$x^2 + y^2 = (x-5)^2 + y^2 = x^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore -10x + 25 = 0, -10y + 25 = 0$$

$$\therefore x = y = \frac{5}{2}$$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\therefore x + y = 5$$

17. 두 점 A(2, 1), B(4, -3) 를 지나는 직선에 수직이고 y 절편이 2 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 A(2, 1), B(4, -3) 를 지나는 직선에 수직이므로,

$$\frac{1 - (-3)}{2 - 4} \cdot a = -1 \text{ 이고, } -2a = -1 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

또, y 절편이 2 이므로 $b = 2$ 이고,

$$\text{따라서 } a + b = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

18. 세 직선 $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + y = k \\ kx - 5y = 5 \end{cases}$ 이 한점 $P(a, b)$ 에서 만날 때 $a + b$ 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$3x + y = 7 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x + y = k \cdots \textcircled{2}$$

$$kx - 5y = 5 \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 의 교점은 $(7 - k, -14 + 3k)$ 이므로

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면,

$$k^2 + 8k - 65 = 0 \quad \therefore k = 5 \text{ 또는 } -13$$

$$\therefore P(a, b) = (2, 1) \text{ 또는 } (20, -53)$$

$$\therefore a + b \text{ 의 최댓값은 } 2 + 1 = 3$$

19. 다음 두 원이 접할 때, a 의 값이 될 수 있는 것은?

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2ax - 2y + 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2ay + 1 &= 0\end{aligned}$$

- ① 1 ② 2 ③ $2\sqrt{2} - 1$
- ④ $-1 + \sqrt{3}$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}$

해설

$(x - a)^2 + (y - 1)^2 = a^2$,
 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = a^2$ 이므로,
두 원의 중심은 각각 $(a, 1)$, $(1, a)$ 이고,
반지름은 둘 다 a ($\because a > 0$)이다.
 $\sqrt{(a - 1)^2 + (1 - a)^2} = 2a$
 $\therefore 2(a - 1)^2 = 4a^2$
 $\therefore a^2 + 2a - 1 = 0$
 $\therefore a = -1 \pm \sqrt{2}$

20. 직선 $y = 2x$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?
- ① $y = x + 1$ 또는 $y = 2x - 11$
 - ② $y = 2x + 2$ 또는 $y = 4x - 4$
 - ③ $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$
 - ④ $y = 3x + 6$ 또는 $y = 7x - 19$
 - ⑤ $y = 6x + 3$ 또는 $y = 3x - 5$

해설

구하는 접선이 직선 $y = 2x$ 에 평행하므로
 $y = 2x + b \cdots \cdots \textcircled{1}$ 로 놓을 수 있다.
이 때, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에서
 $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 20$ 이므로
중심이 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$ 인 원이다.
따라서, 원의 중심 $(1, -3)$ 에서 직선 $y = 2x + b$,
즉 $2x - y + b = 0$ 까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로
$$\frac{|2 + 3 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$$
 $|b + 5| = 10, b + 5 = \pm 10$ $\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
 $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

해설

$\textcircled{1}$ 을 원의 방정식에 대입하면
 $x^2 + (2x + b)^2 - 2x + 6(2x + b) - 10 = 0$
 $5x^2 + 2(5 + 2b)x + b^2 + 6b - 10 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면
$$\frac{D}{4} = (5 + 2b)^2 - 5(b^2 + 6b - 10) = 0$$
 $b^2 + 10b - 75 = 0, (b - 5)(b + 15) = 0$ $\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$ 이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
구하는 접선의 방정식은
 $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

21. 점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 접할 때, 접점의 좌표 또는 접선의 방정식으로 옳지 않은 것은?
- ① 접점의 좌표: $(2, 1)$
- ② 접선의 방정식: $2x + y - 5 = 0$
- ③ 접점의 좌표: $(-1, 2)$
- ④ 접선의 방정식: $x - 2y + 5 = 0$
- ⑤ 접점의 좌표: $(1, 2)$

해설

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때, 접선 $\textcircled{1}$ 은 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$x_1 + 3y_1 = 5 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또한, 접점 (x_1, y_1) 은 원 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

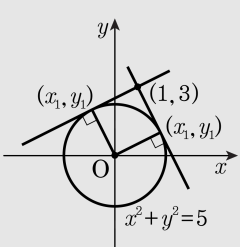
$\textcircled{2}$ 에서 $x_1 = 5 - 3y_1$ 을 $\textcircled{3}$ 에 대입하여 풀면

$$x_1 = 2, y_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = -1, y_1 = 2$$

따라서, 구하는 접점의 좌표는 $(2, 1), (-1, 2)$

이것을 각각 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$2x + y - 5 = 0 \text{ 또는 } x - 2y + 5 = 0$$



22. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i$ 의 값은?

- ① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{그러므로 } \frac{1}{2} \left(z - \frac{1}{z} \right) i &= \frac{1}{2} (z - \bar{z}) i \\ &= \frac{1}{2} (x + yi - x + yi) i \\ &= \frac{1}{2} (2yi) i = -y \end{aligned}$$

23. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
 $x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
 $\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
 $\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha, 2\alpha$ 가 된다.
 $\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $b = \pm 12, c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $-7, x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합) $= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

24. 원 $x^2 + y^2 = 8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A,B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x + y_1y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1}$ (단, $x_1 > 0, y_1 > 0$)

한편, 두 점 A,B 는 각각 접선 $\textcircled{1}$ 과 x 축, y 축의 교점이므로

$$A\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), B\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{x_1} \cdot \frac{8}{y_1} = \frac{32}{x_1 y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2 + y^2 = 8$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + y_1^2 = 8 \text{ 이고}$$

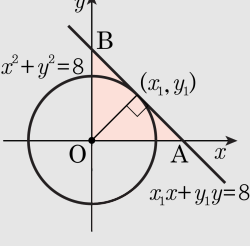
$x_1 > 0, y_1 > 0$ 에서

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 \cdot y_1^2} = x_1 y_1, x_1 y_1 \leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 y_1} \geq \frac{1}{4} \leftarrow \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore S = \frac{32}{x_1 y_1} \geq 32 \cdot \frac{1}{4} = 8 \text{ (단, 등호는 } x_1 = y_1 \text{ 일 때 성립)}$$

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.



25. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 위의 점에서 직선 $4x - 3y + 5 = 0$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

최댓값은 원 중심에서 직선까지 거리 더하기 반지름이고, 최솟값은 원 중심에서 직선까지 거리 빼기 반지름이다.

$$\text{원의 방정식 : } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow \text{최대 : } \frac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} + 2 = 5$$

$$\Rightarrow \text{최소 : } \frac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - 2 = 1$$

$$\therefore \text{최댓값} + \text{최솟값} = 6$$