1. 등식 $x+y+(x-2y)i=1+7i$을 만족하는 두 실수 x, y에 대하여 xy의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 3 ② -3 ③ 6 ④ -6 ⑤ 8

해설

복소수의 상등에 의하여

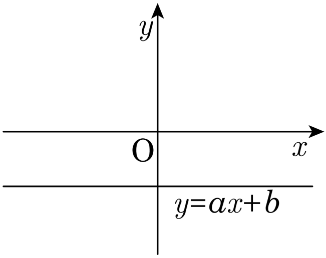
$x+y=1,\ x-2y=7$

$x=3,\ y=-2$

$\therefore\ xy=-6$

2. 다음 그림과 같이 $y=ax+b$의 그래프가 x축에 평행인 직선일 때, $y=bx+a-2$의 그래프가 반드시 지나는 사분면을 모두 고르면?

㉠ 제1사분면	㉡ 제2사분면
㉢ 제3사분면	㉣ 제4사분면

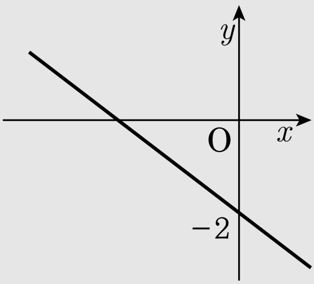


① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

주어진 직선 $y=ax+b$의 그래프가
x축과 평행하면서 x축 아래쪽에
놓여 있으므로 $a=0,\ b<0$이다.
이 때, $y=bx+a-2$에서
기울기 : $b<0$, y절편 : $a-2=-2<0$이므로
직선 $y=bx=a-2$의 그래프는
다음 그림과 같다.
따라서 이 직선의 그래프가 반드시 지나는
사분면은 제 $2, 3, 4$사분면이다.



3. 다항식 $2x^3 + x^2 + 3x$를 $x^2 + 1$로 나눈 나머지는?

① $x - 1$ ② x ③ 1

④ $x + 3$ ⑤ $3x - 1$

해설

직접 나누어보면

$$(2x + 1) + \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

몫 : $2x + 1$, 나머지 : $x - 1$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$일 때, $f(x) - 2 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b에 대하여 $a + b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$이므로

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x(x^2 - 1) + a(x - x^2) + b(x^2 - 1)$

$= x^3 + (-a + b)x^2 + (a - 1)x - b \cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.

즉, $-a + b = -3,\ a - 1 = 3,\ b = 1$

이므로 $a = 4,\ b = 1$

$\therefore\ a + b = 5$

5. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$　② $a=0, b=3$　③ $a=-1, b=2$

④ $a=0, b=2$　⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k-a)^2 - (k^2+b-3) = 0$

$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a = 0,\ a^2 - b + 3 = 0$

$\therefore \quad a = 0, b = 3$

6. A $(4, 7)$, B $(3, 2)$, C $(5, 3)$, D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $y - x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$\therefore \quad x + 3 = 9,\ y + 2 = 10$

$\therefore \quad x = 6,\ y = 8$

7. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ 4)$ 를 지나는 직선에 평행하고 y 절편이 -1 인 직선의 방정식은 $y=ax+b$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값은 ?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직선 $y=ax+b$ 는 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-3,\ 4)$ 를 지나는 직선에 평행하므로 기울기는 같다.

$$\therefore\ a=\frac{2-4}{1-(-3)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

또, y 절편이 -1 이므로 $b=-1$

$$\therefore\ a+b=-\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{3}{2}$$

8. 두 직선 $x+y-4=0,\ 2x-y+1=0$ 의 교점과 점 $(2,-1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y=ax+b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-28$

해설

$\begin{cases} x+y-4=0 \\ 2x-y+1=0 \end{cases}$ 을 연립하면

교점 : $(1,3) \Rightarrow\ (1,3),(2,-1)$ 을 지나는 직선

$y=\dfrac{-1-3}{2-1}(x-1)+3$

$\Rightarrow\ y=-4x+7$

$\therefore a=-4,\ b=7$

$\therefore\ ab=-28$

9. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=6,\ abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

10. 다항식 $f(x)$를 $x-3$, $x-4$로 나눈 나머지가 각각 $3, 2$이고, 다항식 $f(x+1)$을 x^2-5x+6으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(3)=3,\ f(4)=2$

$R(x)=ax+b$라 하면

$f(x+1)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$x=2$대입,

$f(3)=2a+b=3$

$x=3$대입,

$f(4)=3a+b=2$

$a=-1,\ b=5$

$R(x)=-x+5,$

$R(1)=-1+5=4$

11. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times 2011+1}$ 의 값을 a라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$$a=\frac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$$

$=2013$이므로

$$\therefore\ \frac{a+1}{a-1}=\frac{2013+1}{2013-1}=\frac{2014}{2012}=\frac{1007}{1006}$$

12. $x = 1001$ 일 때, $\dfrac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6 - x^4 + x^2 - 1}{x^5 + x^4 + x + 1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)} \\ &= x - 1 \\ &= 1001 - 1 \\ &= 1000\end{aligned}$$

13. 다음 중 옳은 것은?

① $(1+\sqrt{-1})^3 = 2i+4$

② $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} = 2i$

③ $(-\sqrt{-3})^2 = 3$

④ $(\sqrt{-5})^3 = 5\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-3}\sqrt{-9} = -3\sqrt{3}$

해설

① $-2+2i$

② $-2i$

③ -3

④ $-5\sqrt{5}i$

14. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + a + 1 = 0$의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 n, $n+1$이라 하면

$$\begin{cases} n + (n+1) = a \cdots\cdots ㉠ \\ n(n+1) = a+1 \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $n = \dfrac{a-1}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2}+1\right) = a+1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5) = 0$

$a = -1,\ 5$

$\therefore -1 + 5 = 4$

15. 점 A(1, 2)와 B(−1, − 2)를 두 개의 꼭짓점으로 하는 정삼각형의 다른 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $C(\sqrt{3},\ -2\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

② $C(-\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

③ $C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

④ $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$ 또는 $C(2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

⑤ $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

해설

정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면, $\overline{AB}=\overline{BC}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+2x+y^2+4y=15\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{AB}=\overline{CA}$에서

$\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x+y^2-4y=15\cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $x+2y=0$

$\therefore\ x=-2y$

이것을 ㉠에 대입하면 $4y^2-4y+y^2+4y=15$

$\therefore\ y^2=3$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{3}$

따라서 $x=\mp2\sqrt{3}$ (복호동순)

$\therefore\ C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$ 또는 $C(-2\sqrt{3},\ \sqrt{3})$

16. 두 점 $\mathrm{A}(2, -1)$, $\mathrm{B}(6, 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle\mathrm{OPQ}$의 외심의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\mathrm{P}(a, 0)$, $\mathrm{Q}(0, b)$라 하면

$(2-a)^2+(-1-0)^2=(6-a)^2+(3-0)^2 \cdots$ ㉠

$(2-0)^2+(-1-b)^2=(6-0)^2+(3-b)^2 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a=5$, ㉡에서 $b=5$

$\triangle\mathrm{OPQ}$의 외심을 (x, y)라 하면

$x^2+y^2=(x-5)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

$\therefore\ -10x+25=0,\ -10y+25=0$

$\therefore\ x=y=\dfrac{5}{2}$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$

$\therefore\ x+y=5$

17. 두 점 $A(2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$ 를 지나는 직선에 수직이고 y 절편이 2 인 직선의 방정식은 $y = ax + b$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

해설

직선 $y = ax + b$ 는 두 점 $A(2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$ 를 지나는 직선에 수직이므로,

$\frac{1-(-3)}{2-4} \cdot a = -1$ 이고, $-2a = -1$ 이다.

$\therefore\ a = \frac{1}{2}$

또, y 절편이 2 이므로 $b = 2$ 이고,

따라서 $a + b = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

18. 세 직선 $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2x+y=k \\ kx-5y=5 \end{cases}$ 이 한점 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 에서 만날 때 $a+b$ 의 최댓값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3x+y=7 \quad \cdots ㉠$
$2x+y=k \quad \cdots ㉡$
$kx-5y=5 \cdots ㉢$

㉠과 ㉡의 교점은 $(7-k,\ -14+3k)$ 이므로
이를 ㉢에 대입하면,
$k^2+8k-65=0 \qquad \therefore\ k=5$ 또는 -13
$\therefore\ \mathrm{P}(a,\ b)=(2,\ 1)$ 또는 $(20,\ -53)$
$\therefore\ a+b$ 의 최댓값은 $2+1=3$

19. 다음 두 원이 접할 때, a의 값이 될 수 있는 것은?

$$x^2+y^2-2ax-2y+1=0$$
$$x^2+y^2-2x-2ay+1=0$$

① 1　② 2　③ $2\sqrt{2}-1$
④ $-1+\sqrt{3}$　⑤ $-1+\sqrt{2}$

해설

$(x-a)^2+(y-1)^2=a^2$,
$(x-1)^2+(y-a)^2=a^2$ 이므로,
두 원의 중심은 각각 $(a,\ 1)$, $(1,\ a)$이고,
반지름은 둘 다 $a(\because\ a>0)$이다.
$\sqrt{(a-1)^2+(1-a)^2}=2a$
$\therefore\ 2(a-1)^2=4a^2$
$\therefore\ a^2+2a-1=0$
$\therefore\ a=-1\pm\sqrt{2}$

20. 직선 $y = 2x$ 에 평행하고 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에 접하는 접선의 방정식을 구하면?

① $y = x + 1$ 또는 $y = 2x - 11$

② $y = 2x + 2$ 또는 $y = 4x - 4$

③ $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

④ $y = 3x + 6$ 또는 $y = 7x - 19$

⑤ $y = 6x + 3$ 또는 $y = 3x - 5$

해설

구하는 접선이 직선 $y = 2x$ 에 평행하므로
$y = 2x + b \cdots\cdots$ ㉠ 로 놓을 수 있다.
이 때, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 10 = 0$ 에서
$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$ 이므로
중심이 $(1, -3)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{20}$ 인 원이다.
따라서, 원의 중심 $(1, -3)$ 에서 직선 $y = 2x + b$,
즉 $2x - y + b = 0$ 까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2+3+b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{20}$$

$|b+5| = 10, b + 5 = \pm 10$
$\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$
이것을 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
$y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

해설

㉠을 원의 방정식에 대입하면
$x^2 + (2x+b)^2 - 2x + 6(2x+b) - 10 = 0$
$5x^2 + 2(5+2b)x + b^2 + 6b - 10 = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (5+2b)^2 - 5\left(b^2 + 6b - 10\right) = 0$$

$b^2 + 10b - 75 = 0, (b-5)(b+15) = 0$
$\therefore b = 5$ 또는 $b = -15$ 이것을 ㉠에 대입하면
구하는 접선의 방정식은
$y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 15$

21. 점 $(1, 3)$ 을 지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 접할 때, 접점의 좌표 또는 접선의 방정식으로 옳지 않은 것은?

① 접점의 좌표 : $(2,\ 1)$

② 접선의 방정식 : $2x + y - 5 = 0$

③ 접점의 좌표 : $(-1, 2)$

④ 접선의 방정식 : $x - 2y + 5 = 0$

⑤ 접점의 좌표 : $(1,\ 2)$

해설

접점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$ 이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x + y_1y = 5 \cdots\cdots$ ㉠

이때, 접선 ㉠은 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$x_1 + 3y_1 = 5 \cdots\cdots$ ㉡

또한, 접점 (x_1, y_1) 은 원 위의 점이므로

$x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots\cdots$ ㉢

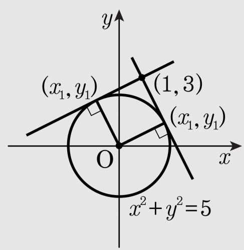
㉡에서 $x_1 = 5 - 3y_1$ 을 ㉢에 대입하여 풀면

$x_1 = 2,\ y_1 = 1$ 또는 $x_1 = -1,\ y_1 = 2$

따라서, 구하는 접점의 좌표는 $(2, 1), (-1, 2)$

이것을 각각 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$2x + y - 5 = 0$ 또는 $x - 2y + 5 = 0$



22. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$　　② $-y$　　③ $2x$　　④ $\frac{-x}{2}$　　⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$

$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

23. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

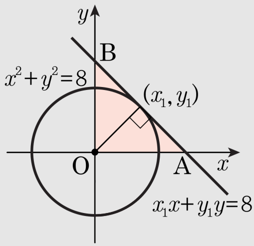
처음 방정식을 $x^2+bx+c=0$이라 하면
$x^2+bx+(c+1)=0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D=b^2-4(c+1)=0$
$\therefore\ b^2=4c+4\cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2+bx+(c-3)=0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha+2\alpha=-b\cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha\cdot 2\alpha=c-3\cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b=\pm 12,\ c=35$이므로
처음 방정식은 $x^2\pm 12x+35=0$
$\therefore\ x=-5$ 또는 $-7,\quad x=5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$=(\pm 5)^2+(\pm 7)^2=74$

24. 원 $x^2+y^2=8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=8 \cdots\cdots$ ㉠ (단, $x_1>0, y_1>0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 ㉠과 x 축, y 축의 교점이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), \mathrm{B}\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x_1}\cdot\frac{8}{y_1}=\frac{32}{x_1y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ 이고

$x_1>0, y_1>0$ 에서

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\geq\sqrt{x_1^2\cdot y_1^2}=x_1y_1,\ x_1y_1\leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1}\geq\frac{1}{4}\leftarrow\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$\therefore \mathrm{S}=\frac{32}{x_1y_1}\geq 32\cdot\frac{1}{4}=8$$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.

25. 원 $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ 위의 점에서 직선 $4x-3y+5=0$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

최댓값은 원 중심에서 직선까지 거리 더하기 반지름이고, 최솟값은 원 중심에서 직선까지 거리 빼기 반지름이다.

원의 방정식 : $(x-1)^2+(y+2)^2=4$

$\Rightarrow$ 최대 : $\dfrac{|4\times1-3\times(-2)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}+2=5$

$\Rightarrow$ 최소 : $\dfrac{|4\times1-3\times(-2)+5|}{\sqrt{4^2+3^2}}-2=1$

$\therefore$ 최댓값 $+$ 최솟값 $=6$