1. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

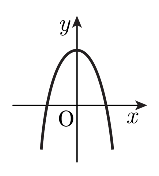
㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
㉢ 선분과 그 길이의 대응
㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

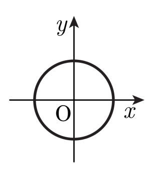
① ㉠, ㉡, ㉢ ② ㉠, ㉡, ㉤ ③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉣, ㉤

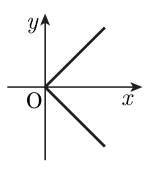
해설

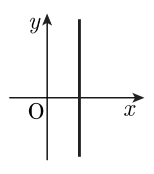
㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r는 오직 하나의
넓이 πr^2에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서
$b^2-4ac<0$이면 대응을 갖지 못하고(허근),
$b^2-4ac>0$이면 두 개의 대응을 가지므로
(서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로
함수가 될 수 있다.
㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고
그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 특정한 실수 a를 포함하는 집합은
$\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\cdots$ 등 무수히 많다.
즉, 실수 a에 a를 포함하는 무수히
많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

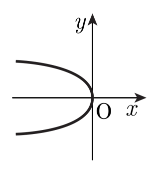
2. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

함수는 하나의 x값에 여러 개의 y값이 대응될 수 없다.

3. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$를 $f(x) = |x|$라 하자. 이때 함수 f의 치역의 부분집합의 개수는?

① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$f(-1) = f(1) = 1,\ f(0) = 0,\ f(2) = 2$이므로 함수 f의 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.
원소의 개수가 3인 집합의 부분집합은 $2^3 = 8$(개)이다.

4. 자연수의 집합을 N, 양의 유리수 집합을 Q^+ 라고 할 때, 함수 f가 $f\ :Q^+\ \rightarrow\ N\times N$으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, $p,\ q$는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right)=(p,\ 0)$　　② $f\left(\frac{p}{q}\right)=(0,\ q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right)=(p+q,\ 0)$　　④ $f\left(\frac{p}{q}\right)=(0,\ pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right)=(p,\ q)$

해설

①$\frac{2}{3}\neq\frac{2}{5}$일 때

$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)=(2.\ 0)$

②, ③, ④도 같은 방법으로
일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

5. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a, 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
$\therefore\ 4^3 = 64$
$\therefore\ a + b = 64$

6. 다음 식을 간단히 하면?

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}$$

① 1　② x　③ $\frac{1}{x}$　④ $\frac{1}{1-x}$　⑤ $-x$

해설

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}$$

$$=1-\frac{x-1}{x-1-x}$$

$$=1+x-1=x$$

7. $a < 0,\ b < 0$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ ② $\dfrac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = ab$ ④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

해설

① $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b} = \sqrt{(-1)a}\ \sqrt{b}$
$= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

8. 유리수 $a,\ b$에 대하여 $(1+2\sqrt{2})a+(-1+\sqrt{2})b=5+7\sqrt{2}$가 성립할 때, $a+b$의 값은?

① 3　　② 2　　③ 0　　④ -2　　⑤ -3

해설

$(1+2\sqrt{2})a+(-1+\sqrt{2})b=5+7\sqrt{2}$

$(a-b)+(2a+b)\sqrt{2}=5+7\sqrt{2}\cdots$ ㉠

$a,\ b$가 유리수이면

$a-b,\ 2a+b$도 유리수이므로 ㉠에서

$$\begin{cases} a-b=5 \\ 2a+b=7 \end{cases}$$

이것을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=3$

9. 함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=3$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y=2$ 이다.

③ 함수 $y=\dfrac{2}{x}+2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축을 지나지 않는다.

⑤ 함수 $y=\dfrac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$y=\dfrac{2x-4}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+2$

그러므로 함수의 점근선은 $x=3,\ y=2$이고

$y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 3만큼,

y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

10. 다음 보기에 주어진 함수의 그래프 중 평행이동하였을 때, 함수 $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ 의 그래프와 겹쳐질 수 있는 것을 모두 고른 것은?

보기

Ⅰ. $y = \dfrac{2x-5}{x-2}$

Ⅱ. $y = \dfrac{2}{x-1}$

Ⅲ. $y = \dfrac{3x+4}{x+1}$

Ⅳ. $y = \dfrac{2x}{x-1}$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅳ　③ Ⅱ, Ⅳ

④ Ⅱ, Ⅲ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅳ

해설

$y = \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{x-1+2}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

이므로 $y = \dfrac{k}{x-p} + q$

꼴로 정리 했을 때, $k = 2$ 이면

평행이동하여 그래프가 서로 겹칠 수 있다.

Ⅰ. $y = \dfrac{2(x-2)-1}{x-2} = 2 - \dfrac{1}{x-2}$

$\therefore k = -1$

Ⅱ. $y = \dfrac{2}{x-1}$ $\therefore k = 2$

Ⅲ. $y = \dfrac{3(x+1)+1}{x+1} = 3 + \dfrac{1}{x+1}$ $\therefore k = 1$

Ⅳ. $y = \dfrac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \dfrac{2}{x-1}$ $\therefore k = 2$

11. 분수함수 $y = \dfrac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선을 $x = a$, $y = b$ 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$y = \dfrac{3x-1}{x+1} = \dfrac{-4}{x+1} + 3$ 에서 점근선은

$x = -1,\ y = 3$

$a = -1,\ b = 3$

$\therefore\ a+b = 2$

12. 무리함수 $y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \sqrt{2(x-a)+1}+2+b$$
$$= \sqrt{2x-2a+1}+2+b$$

이 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 같으므로
$a=2,\ -2a+1=b,\ 2+b=c$
따라서, $a=2,\ b=-3,\ c=-1$ 이므로
$\therefore\ a+b+c=-2$

13. $y=\sqrt{4x-12}+5$의 그래프는 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축으로 α, y축으로 β만큼 평행이동한 것이다. $\alpha+\beta$의 값을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y=2\sqrt{x-3}+5$이므로,
이것은 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를
x축 방향으로 3만큼,
y축 방향으로 5만큼
평행이동한 그래프의 함수이다.
즉, $\alpha=3$, $\beta=5$
$\therefore\ \alpha+\beta=8$

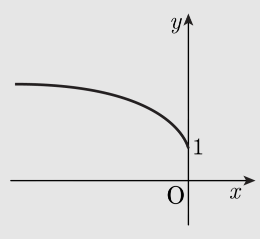
14. 다음 중 무리함수 $y = \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}}$ 의 정의역과 치역을 차례대로 나타낸 것을 고르면?

① $\{x \mid x \ge 0\}, \{y \mid y \ge 1\}$　② $\{x \mid x \le 0\}$, $\{y \mid y \ge 1\}$
③ $\{x \mid x \ge 1\}$, $\{y \mid y \le 0\}$　④ $\{x \mid x \le 1\}$, $\{y \mid y \ge 0\}$
⑤ $\{x \mid x \le 0\}$, $\{y \mid y \le 1\}$

해설

$$y = \sqrt{-3x+1+\sqrt{-12x}}$$
$$= \sqrt{-3x+1+2\sqrt{(-3x)\cdot 1}}$$
$$= \sqrt{-3x}+1$$

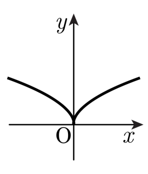
따라서 그래프를 그리면 다음 그림과 같다.



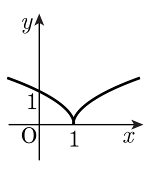
∴ 정의역 : $\{x \mid x \le 0\}$,
치역 : $\{y \mid y \ge 1\}$

15. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$의 그래프를 구하면?

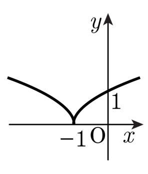
①



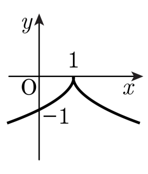
②



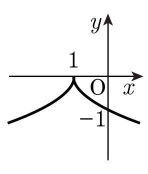
③



④



⑤



해설

$x \geq -1$ 이면 $y = \sqrt{x+1}$
$x < -1$ 이면 $y = \sqrt{-x-1}$ 이므로
3번이 정답임.

16. 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.
$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$
$\therefore$ $x = 4$ 또는 $x = -2$
즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.
$\therefore a = 3$

17. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여 $f(f(f(x))) = x$가 되는 x의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

함수 $f(x) = 2x - 3$에 대하여
$f(f(x)) = 2f(x) - 3 = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$
$f(f(f(x))) = f(4x - 9) = 2(4x - 9) - 3 = 8x - 21$
$f(f(f(x))) = x$이므로 $8x - 21 = x$
$\therefore x = 3$

18. 함수 $f(x)$가 $f(2x-1)=x+2$ 일 때, $f(3)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$2x-1=3$ 으로 놓으면 $x=2$

$\therefore\ f(3)=4$

19. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f(3x+2)=6x-3$ 이다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(3)$ 의 값을 구하여라.

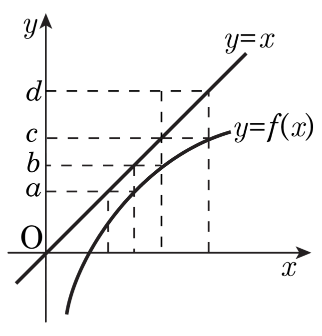
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(3x+2)=6x-3$ 에서 $3x+2=t$ 라 하면
$f(t)=2t-7$ 이므로 $f(x)=2x-7$
$\therefore g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$
$\therefore g(3)=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=5$

20. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

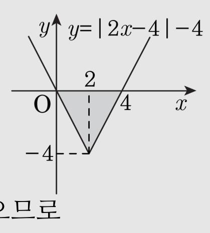
$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
$f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$

21. 함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



절대값 기호 안을 0으로 하는 x의 값은

$2x-4=0$ 에서 $x=2$

(i) $x<2$ 일 때, $y=-(2x-4)-4=-2x$

(ii) $x\geq 2$ 일 때, $y=(2x-4)-4=2x-8$

따라서 (i), (ii)에 의하여

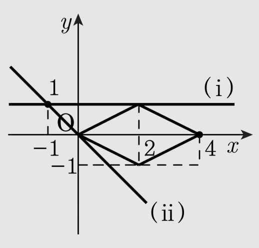
함수 $y=|2x-4|-4$ 의 그래프는 그림과 같으므로

구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

22. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$이 만나도록 하는 m의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는 $x+2y=2$ 의 그래프에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

직선 $y=mx+m+1$은 m의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$을 지나므로 두 그래프가 만나려면

(i) $m \leq 0$

(ii) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$

(i), (ii) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$

따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

23. 두 양수 m, n에 대하여 $\frac{ma+nb}{m+n}=\frac{mb+nc}{m+n}=\frac{mc+na}{m+n}=10$이 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

$\frac{ma+nb}{m+n}=\frac{mb+nc}{m+n}=\frac{mc+na}{m+n}$

$=\frac{(ma+nb)+(mb+nc)+(mc+na)}{(m+n)+(m+n)+(m+n)}$

$=\frac{m(a+b+c)+n(a+b+c)}{3(m+n)}$

$=\frac{(m+n)(a+b+c)}{3(m+n)}=\frac{a+b+c}{3}$

따라서, $\frac{a+b+c}{3}=10$이므로

$a+b+c=30$

24. $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{x}{(x+1)(2x+1)}+\dfrac{x}{(2x+1)(3x+1)}-\dfrac{2x+1}{x(3x+1)}$ 을 간단히 하면 ?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ $\dfrac{2}{3}$

해설

주어진 식을 이항분리시키면,

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}\right)\\ &\quad+\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3x+1}\right)-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3x+1}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

25. $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{13\times 14}=\frac{a}{14}$ 에서 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

준식 $=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots-\frac{1}{14}=1-\frac{1}{14}=\frac{13}{14}$

$\therefore a=13$

26. 등식 $\frac{225}{157} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 1$

▷ 정답 : $b = 2$

▷ 정답 : $c = 3$

▷ 정답 : $d = 4$

▷ 정답 : $e = 5$

해설

$\frac{225}{157} = 1 + \frac{68}{157} = 1 + \cfrac{1}{\frac{157}{68}}$

$= 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \frac{5}{21}}}$

$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{5}}}}$

$\therefore a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 4,\ e = 5$

27. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$ 일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$ 이다. 이때, $m+n$ 의 값을 구하여라.(단, m,n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0\cdots$ ㉠
$x-2y+3z=0\cdots$ ㉡
㉠ $\times 2-$ ㉡ $: 3x=z$
$\therefore x=\dfrac{z}{3},\ y=\dfrac{5z}{3}$
여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$
따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\dfrac{3}{5}\ \ \therefore m=5,\ n=3$
$\therefore m+n=8$

28. x, y, z가 양의 실수이고, $\frac{x(y+z)}{15}=\frac{y(z+x)}{13}=\frac{z(x+y)}{18}$ 일 때, $x:y:z$를 구하면?

① $1:2:4$ ② $3:4:5$ ③ $5:4:8$

④ $4:7:9$ ⑤ $4:7:5$

해설

$\frac{x(y+z)}{15}=\frac{y(z+x)}{13}=\frac{z(x+y)}{18}=k$

$xy+xz=15k,\ yz+yx=13k,\ zx+zy=18k$

변변끼리의 합은 $2(xy+yz+zx)=46k$

$\therefore\ \ xy+yz+zx=23k$

$yz=8k,\ zx=10k,\ xy=5k$

변변끼리 곱하면 $(xyz)^2=400k^3,\quad xyz>0$

$\therefore\ \ xyz=20k\sqrt{k}$

$x=\frac{5}{2}\sqrt{k},\ y=2\sqrt{k},\ z=4\sqrt{k}$

$\therefore\ \ x:y:z=5:4:8$

29. 작년에 3 만원 하던 야구 배트와 2 만원 하던 글러브가 올해는 각각 10%, 15% 가 인상되었다. 야구 배트와 글러브를 한 세트로 볼 때, 한 세트의 인상률은?

① 11.5% ② 12% ③ 12.5%
④ 13% ⑤ 13.5%

해설

작년의 한 세트의 가격 : $30000+20000=50000$ (원)

금년의 야구 배트의 가격 : $30000\times\left(1+\frac{10}{100}\right)=33000$ (원)

금년의 글러브의 가격 : $20000\times\left(1+\frac{15}{100}\right)=23000$ (원)

금년의 한 세트의 가격 : $33000+23000=56000$ (원)
따라서 한 세트의 가격은 $56000-50000=6000$ (원) 인상되었으므로,
인상률은 $\frac{6000}{50000}\times100=12(\%)$ 이다.

30. $0 \leq a < 2$ 이고 $x = \dfrac{4a}{a^2+4}$ 일 때
$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1 + \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1 - \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로
$a+2 > 0,\ a-2 < 0$

$$\therefore \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\therefore \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{a^2+4}}$$

$\therefore\ a = 0$ 일 때 최댓값 2

31. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

$x + y = 2\sqrt{3}$, $xy = 1$

$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = 12 - 1 = 11$

32. 분수함수 $f(x) = \dfrac{3}{ax-4} + 1$에 대해서 $(f \circ f)(x) = x$가 성립할 때, 상수 a의 값은?

① -5 ② -3 ③ -2 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(f \circ f)(x) = x$이려면 $f(x) = f^{-1}(x)$ 이어야 한다.
먼저 $f^{-1}(x)$ 를 구해보면,

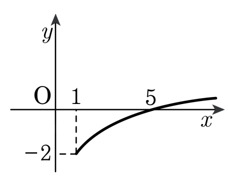
$y = \dfrac{3}{ax-4} + 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{a(y-1)} + \dfrac{4}{a}$

$\Rightarrow y = \dfrac{3}{a(x-1)} + \dfrac{4}{a} \cdots\cdots f^{-1}(x)$

$\therefore f(x) = f^{-1}(x)$이려면 $a = 4$

33. 다음 그림은 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?



① 1　② −1　③ 2　④ −2　⑤ 3

해설

$y=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프를 보면

점$(1,-2)$에서부터 시작하므로

$-\frac{b}{a}=1,\ c=-2$

$\therefore -b=a\ ,\ c=-2$

$y=\sqrt{ax-a}-2$가 점$(5,0)$을 지나므로

$0=\sqrt{5a-a}-2,\ 2=\sqrt{4a}$

양변을 제곱하면 $4=4a$

$\therefore\ a=1$

따라서 $a=1, b=-1, c=-2$이므로

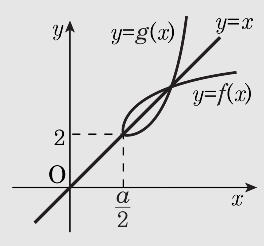
$a+b+c=1-1-2=-2$

34. 무리함수 $f(x) = \sqrt{2x-a}+2$ 의 그래프와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\sqrt{2}$　④ 2　⑤ 4

해설

다음 그림에서 알 수 있듯
$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 교점은
$y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점과 같다.



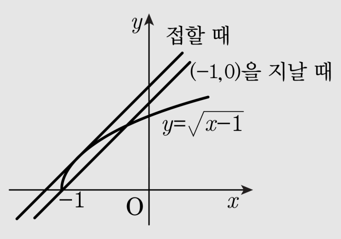
두 교점의 좌표를 각각 $(\alpha,\ \alpha)$, $(\beta,\ \beta)$ 라 하면
두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2} = 2\sqrt{2}$
$\therefore (\alpha-\beta)^2 = 4 \cdots$ ①
한편, $f(x) = \sqrt{2}x - a + 2$ 와
$y = x$ 의 교점의 x 좌표는
$\sqrt{2x-a}+2 = x$ 에서 $\sqrt{2x-a} = x-2$
양변을 제곱하여 정리하면 $x^2-6x+4+a=0$
이 이차방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이므로
근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=4+a$
$(\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로 ①에서
$4 = 36-4(4+a),\ 4+a=8$
$\therefore a = 4$

35. 두 함수 $y = \sqrt{x+1}$과 $y = x+a$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 가지도록 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $1 \le a < \frac{5}{4}$ ② $1 < a < \frac{5}{4}$ ③ $1 \le a \le \frac{5}{4}$

④ $2 \le a < \frac{5}{4}$ ⑤ $1 \le a < 3$

해설



그림에서

(i) $y = x + a$가 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때, $a = 1$

(ii) $y = x + a$ 와 $y = \sqrt{x+1}$ 이 접할 때

$x + a = \sqrt{x+1}$ 에서 양변을 제곱하면

$(x+a)^2 = x + 1$

$x^2 + (2a-1)x + a^2 - 1 = 0$

$\mathrm{D} = (2a-1)^2 - 4(a^2-1) = 0$

$-4a + 1 + 4 = 0 \Leftrightarrow 4a = 5$

$\therefore a = \frac{5}{4}$

(i), (ii) $1 \le a < \frac{5}{4}$

36. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로
$x = 1,\ y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

37. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
> Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 이면
$f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
$x_1 = 1,\ x_2 = -1$ 이면
$f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1) \neq 0,\ f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

38. $f\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=3x-1$ 을 만족하는 $f(x)$ 에 대하여, $f^{-1}(11)$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$f^{-1}(3x-1)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 이므로

$3x-1=11$ 에서 $x=4$

$\therefore\ f^{-1}(11)=\frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}}$

$=-3$

39. 두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여 $\left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{4}$　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

두 함수 $f(x)=4x+1,\ g(x)=2x+3$ 에 대하여

$$\begin{aligned} g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g &= g\circ\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\circ g \\ &= \left(g\circ g^{-1}\right)\circ f^{-1}\circ g \\ &= f^{-1}\circ g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2) &= (f^{-1}\circ g)(-2) \\ &= f^{-1}(g(-2)) \\ &= f^{-1}(-1) \end{aligned}$$

$f^{-1}(-1)=a$ 라고 하면 $f(a)=-1$ 이므로

$4a+1=-1$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

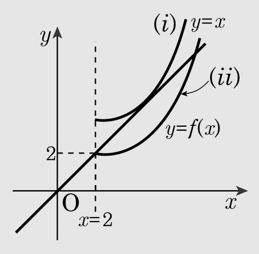
$\therefore \left(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ g\right)(-2)=-\frac{1}{2}$

40. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + k(x \geq 2)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $0 < k < \frac{25}{4}$ ② $k < \frac{25}{4}$ ③ $6 \leq k \leq \frac{25}{4}$
④ $6 < k \leq \frac{25}{4}$ ⑤ $6 \leq k < \frac{25}{4}$

해설

주어진 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = x$ 위에 있다.



따라서, 조건을 만족하려면 $f(x) = x^2 - 4x + k = (x-2)^2 + k - 4(x \geq 2)$ 의 그래프와 직선 $y = x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$가 접할 때,
$x^2 - 4x + k = x,\ x^2 - 5x + k = 0$
이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D = 5^2 - 4k = 0$
$\therefore \mathrm{k} = \frac{25}{4}$

(ii) $y = f(x)$ 의 그래프가 점 $(2,\ 2)$를 지날 때
$2^2 - 4 \cdot 2 + k = 2$이므로 $k = 6$

(i), (ii) 에서 $6 \leq k < \frac{25}{4}$

41. 함수 $y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프와 직선 $y = kx$ 가 세 점에서 만날 때, 상수 k 의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

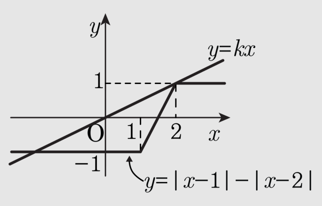
$y = |x-1| - |x-2|$

(i) $x \geq 2$ 일 때, $y = x - 1 - (x-2) = 1$

(ii) $1 \leq x < 2$ 일 때, $y = x - 1 + x - 2 = 2x - 3$

(iii) $x < 1$ 일 때, $y = -(x-1) + (x-2) = -1$

$y = |x-1| - |x-2|$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$y = kx$ 의 그래프는 원점을 지나는 직선이므로 $y = kx$ 의 그래프가 점 $(2,\ 1)$ 을 지날 때

$1 = 2k \quad \therefore k = \frac{1}{2}$

따라서 두 그래프가 세 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는

$0 < k < \frac{1}{2}$ 이다.

그러므로 보기 중 위 범위에 속하지 않는 것은 ①이다.

42. 다음은 $\dfrac{x^2-x-3}{x-1}-\dfrac{x^2+x-1}{x+1}$ 를 계산하는 과정이다. 다음 중 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 차례대로 구하고 풀이를 완성하여 그 값을 바르게 구한 것은?

$$\frac{x^2-x-3}{x-1}=(㉠)+\frac{(㉡)}{x-1}$$
$$\frac{x^2+x-1}{x+1}=(㉢)+\frac{(㉣)}{x+1}$$

① $-x, +3, x, -1, \dfrac{2x+4}{x^2-1}$
② $x, -3, x, -1, -\dfrac{2x+4}{x^2-1}$
③ $x, 3, x, 1, -\dfrac{2x+4}{x^2+1}$
④ $x, -1, x, -3, -\dfrac{2x-4}{x^2-1}$
⑤ $x, 1, x, 3, -\dfrac{2x+4}{x^2+1}$

해설

$$\frac{x^2-x-3}{x-1}=\frac{x(x-1)-3}{x-1}=x+\frac{-3}{x-1}$$
$$\frac{x^2+x-1}{x+1}=\frac{x(x+1)-1}{x+1}=x+\frac{-1}{x+1}$$
$\therefore$ ① $=x$, ② $=-3$, ③ $=x$, ④ $=-1$

$$(\text{준식})=x-\frac{3}{x-1}-\left(x-\frac{1}{x+1}\right)$$
$$=\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x-1}$$
$$=\frac{x-1-3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=-\frac{2x+4}{x^2-1}$$

43. $a+b=4ab$, $b+c=10bc$, $c+a=6ca$일 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$a+b=4ab$에서 $\frac{a+b}{ab}=4$

즉 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4\cdots①$

같은 방법으로 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10\cdots②$

$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=6\cdots③$

①+②+③하면

$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=20$

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=10$

44. $\dfrac{x(y+z)}{27} = \dfrac{y(z+x)}{32} = \dfrac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\dfrac{x(y+z)}{27} = \dfrac{y(z+x)}{32} = \dfrac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면

$xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로

$2(xy + yz + zx) = 94k$, $\quad \therefore\ xy + yz + zx = 47k$ 이므로

$yz = 20k,\ zx = 15k,\ xy = 12k$

또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로

$x^2\ 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$

$225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$

$144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$

$\therefore\ \dfrac{x^2+y^2}{z^2} = \dfrac{9k+16k}{25k} = 1$

45. $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, x^4-4x^3+4x+5 의 값은?

① -2 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 9

해설

$x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-2\sqrt{12}}=2-\sqrt{3}$

$\therefore x-2=-\sqrt{3}$

$x^2-4x+4=3 \Rightarrow x^2-4x=-1$

$$\begin{aligned} x^4-4x^3+4x+5 &= x^2(x^2-4x)+4x+5 \\ &= -x^2+4x+5 \\ &= -(x^2-4x)+5 \\ &= 1+5=6 \end{aligned}$$

46. 함수 $f(x) = 4 - |x|,\ g(x) = -4 + |x|$ 에서, $y = f(g(x))$ 와 $y = g(f(x))$ 로 둘러싸여있는 영역의 넓이는?

① 36 ② 64 ③ 72 ④ 54 ⑤ 108

해설

i) $y = f(g(x)) = 4 - |-4 + |x||$ 에서

$x \geq 4$ 일 때, $y = 4 - (-4 + x) = -x + 8$

$0 \leq x < 4$ 일 때, $y = 4 + (-4 + x) = x$

$-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = 4 + (-4 - x) = -x$

$x < -4$ 일 때, $y = 4 - (-4 - x) = x + 8$

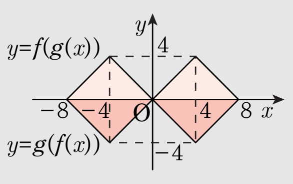
ii) $y = g(f(x)) = -4 + |4 - |x||$ 에서

$x \geq 4$ 일 때, $y = -4 - (4 - x) = x - 8$

$0 \leq x < 4$ 일 때, $y = -4 + (4 - x) = -x$

$-4 \leq x < 0$ 일 때, $y = -4 + (4 + x) = x$

$x < -4$ 일 때, $y = -4 - (4 + x) = -x - 8$



그림의 색칠 부분 넓이를 계산하면

$\therefore\ 8 \times 8 = 64$

47. $A = \{x \mid x \geq a\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 $f(x) = x^2 - 2$ 가 역함수를 갖게 되는 실수 a 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 2　⑤ 3

해설

역함수를 가지려면 함수가 일대일 대응이 되어야 한다.
따라서 $f(x) \geq x$ 를 만족해야한다.
$\Rightarrow x^2 - 2 \geq x$
$\Rightarrow x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$
$A = \{x \mid x \geq a\}$ 이므로 $a = 2$

48. a가 실수일 때, 다음 식이 성립하기 위한 a값의 범위를 구하면?

$$a\sqrt{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \sqrt{a^2-1}$$

① $a > 0$
② $a \geq 1$
③ $a = -1$ 또는 $a \geq 1$
④ $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1$
⑤ $a > 1$ 또는 $a < -1$

해설

좌변 $= a\sqrt{\frac{a^2-(1)^2}{(a)^2}} = \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1}$

$\therefore \frac{a}{|a|}\sqrt{a^2-1} = \sqrt{a^2-1}$ 에서

$\sqrt{a^2-1}(\frac{a}{|a|}-1) = 0$이므로

$\sqrt{a^2-1} = 0$ 또는 $\frac{a}{|a|} = 1$

$\therefore a = \pm 1$ 또는 $a > 0 \cdots$ ㉠
한편 근호 안의 값은 양수이므로
$a^2 - 1 \geq 0$으로부터 $a \geq 1$ 또는 $a \leq -1 \cdots$ ㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡에서 $a = -1$ 또는 $a \geq 1$

49. 양수 x의 소수 부분을 $y(0 \leq y < 1)$라 할 때, $x^2 + y^2 = 18$에 대하여 xy의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y^2 = 18 - x^2,\ 0 \leq y < 1$

$0 \leq y^2 < 1,\ 0 \leq 18 - x^2 < 1$

$17 < x^2 \leq 18,\ \sqrt{17} < x \leq \sqrt{18}$

$x = 4.\times\times \ \therefore x - y = 4(0 \leq y < 1)$

$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy = 18$

$4^2 + 2xy = 18 \quad \therefore 2xy = 18 - 16 = 2$

$\therefore xy = 1$

50. $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1}$ 을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 $x=a$, $y=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1}\cdots$ ①에서

x대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{-x+2}{x+1}\cdots$ ②

① $+2\times$② $\Rightarrow -f(x)=\frac{1}{x+1}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{x+1}$

점근선 $x=-1$, $y=0$

$\therefore a+b=-1$