1. 다음 중 $x^4 - x^2$ 의 인수가 아닌 것은?

① x ② $x-1$ ③ $x+1$
④ x^3-x ⑤ x^4

해설

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 &= x\left(x^3 - x\right) \\ &= x^2\left(x^2-1\right) \\ &= x^2(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

2. $3x^4-x^2-2$를 인수분해 하여라.

① $\left(3x^2-2\right)(x+1)(x-1)$　② $\left(3x^2+2\right)(x-1)(x-1)$
③ $\left(3x^2+2\right)(x+1)(x+1)$　④ $\left(3x^2+3\right)(x+1)(x-1)$
⑤ $\left(3x^2+2\right)(x+1)(x-1)$

해설
$A=x^2$로 치환하면
(준식) $=3A^2-A-2$
$=(3A+2)(A-1)$
$=\left(3x^2+2\right)(x+1)(x-1)$

3. 다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 순서대로 나열한 것은?

① $x^2+x+1,\ 1$　　② $x^2+x+1,\ 2$

③ $2x^2+2x+2,\ 1$　　④ $2x^2+2x+2,\ 2$

⑤ $4x^2+4x+4,\ 4$

해설

다항식 $2x^3+x^2+x+1$를 $2x-1$ 로 나눈 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R이라고 하면
$$\begin{aligned}2x^3+x^2+x+1 &= (2x-1)Q(x)+R\\ &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 2Q(x)+R\end{aligned}$$
이므로

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

$2Q(x)=2x^2+2x+2$

$\therefore\ Q(x)=x^2+x+1,\ R=2$

4. $(125^2 - 75^2) \div \{5 + (30 - 50) \div (-4)\}$ 의 값은?

① 75 ② 125 ③ 900 ④ 1000 ⑤ 1225

해설

$$125^2 - 75^2 = (125 + 75)(125 - 75)$$
$$= 200 \times 50 = 10000$$
$$5 + (30 - 50) \div (-4) = 5 + -\frac{20}{-4} = 10$$
(준 식)$= 10000 \div 10 = 1000$

5. 다항식 $8x^3 - 1$ 을 $4x^2 + 2x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때 $Q(x)$ 의 상수항의 계수는?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x-1)\left(4x^2 + 2x + 1\right)$

$\therefore Q(x) = 2x - 1$

$\therefore$ 상수항은 -1

6. $a^2b+b^2c-b^3-a^2c$을 인수분해하면?

① $(a+b)(a-b)(b+c)$　② $(a-b)(b-c)(c+a)$
③ $(a-b)(a+b)(b-c)$　④ $(a-b)(a+b)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b+c)(c-a)$

해설
$a^2b+b^2c-b^3-a^2c$
$=a^2(b-c)-b^2(b-c)$
$=(a-b)(a+b)(b-c)$

7. 다음 중 $a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c$ 의 인수인 것은?

① $a - b + c$ ② $c - a$ ③ $b + c$
④ $a - b$ ⑤ $c - b + a$

해설

$$\begin{aligned} a^3 - b^2c - ab^2 + a^2c &= a^3 - ab^2 + a^2c - b^2c \\ &= a(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)c \\ &= (a - b)(a + b)(a + c) \end{aligned}$$

8. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$

③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$ ④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$

⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

(준식) $=X(X+1)-6$

$=X^2+X-6$

$=(X+3)(X-2)$

$=(x^2+x+3)(x^2+x-2)$

$=(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$

9. $(x^4 - 8x^2 - 9) \div (x^2 - 9)$ 를 계산하여라.

① $x^2 + 1$ ② $x^2 - 1$ ③ $x^2 + 2$
④ $x^2 - 2$ ⑤ $x^2 + 3$

해설
$x^4 - 8x^2 - 9 = (x^2 - 9)(x^2 + 1)$
$\therefore$ (준식)$= x^2 + 1$

10. $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^2 + x + 2)(x^2 + ax + b)$ 일 때, 상수 a, b 의 곱을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

(좌 변) $= (x^2 + 2)^2 - x^2$

$= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$

11. 다음 중 다항식 x^4-8x^2-9의 인수가 아닌 것은?

① $x-3$　　② $x+3$

③ x^2+1　　④ x^2+9

⑤ x^3+3x^2+x+3

해설

준 식을 인수분해 하면

$$\begin{aligned} x^4-8x^2-9 &= (x^2+1)(x^2-9) \\ &= (x^2+1)(x+3)(x-3) \end{aligned}$$

⑤ $x^2(x+3)+x+3=(x^2+1)(x+3)$

12. $x^4+4x^3-2x^2+ax+b$가 이차식의 완전제곱식이 될 때, 상수 a,b의 값은?

① $a=12,\ b=9$
② $a=-12,\ b=9$
③ $a=12,\ b=-9$
④ $a=-12,\ b=-9$
⑤ $a=9,\ b=12$

해설

$x^4+4x^3-2x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2$ 으로 놓으면
이 식의 우변은
$x^4+2x^2(px+q)+(px+q)^2$
$=x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2$
좌변과 계수를 비교하면
$2p=4,\ p^2+2q=-2$
$p=2,\ q=-3$에서
$a=2pq=-12,\ b=q^2=9$

13. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해 하였더니 $(x+ay)(x-by+c)$가 된다고 할 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

x^2-2x-y^2+2y
$=(x^2-y^2)-2(x-y)$
$=(x+y-2)(x-y)$
$=(x+ay)(x-by+c)$
계수를 비교하면
$a=-1, b=-1, c=-2$
$\therefore a+b+c=-1-1-2=-4$

14. 등식 $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x+a)(x+b)(x+c)$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

조립제법을 사용한다

1	1	4	1	-6
		1	5	6
-2	1	5	6	0
		-2	-6	
-3	1	3	0	
		-3		
	1	0		

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x-1)(x+2)(x+3)$

$\therefore a+b+c = 4$

15. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$이라 놓으면,
$x = -1$일 때, $-1 - 4 - 1 + 6 = 0$
따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.
즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.
즉, $f(x) = (x+1)Q(x)$꼴
$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x+1)$
$\therefore\ f(x) = (x-3)(x-2)(x+1)$
$\therefore\ a^2 + b^2 + c^2 = (-3)^2 + (-2)^2 + 1^2 = 14$

16. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$
② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$
④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설
인수정리를 이용하면
$f(1)=0,\ f(2)=0,\ f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

17. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2-xy(y-x)=(x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2-27b^2=3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3-125=(4a+5)(16a^2-20a+25)$

④ $(x^2-x)(x^2-x+1)-6=(x^2-x+3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

해설

$64a^3-125$

$=(4a)^3-(5)^3$

$=(4a-5)\left(16a^2+20a+25\right)$

18. 사차식 $x^4-10x^2y^2+9y^4$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x-3y$　　② $x-2y$　　③ $x-y$
④ $x+y$　　⑤ $x+3y$

해설

$x^4-10x^2y^2+9y^4=\left(x^2-9y^2\right)\left(x^2-y^2\right)$
$=(x-3y)(x+3y)(x-y)(x+y)$

19. $16a^4 - 250ab^3$ 의 인수가 아닌 것은?

① a

② $2a - 5b$

③ $2a(2a - 5b)$

④ $4a^2 + 10ab + 25b^2$

⑤ $2a(2a + 5b)$

해설

(준식) $= 2a(8a^3 - 125b^3)$

$= 2a\{(2a)^3 - (5b)^3\}$

$= 2a(2a - 5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)$

20. 다음 중 $x^2+y^2+2xy-2x-2y$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x+y$　　② $-x-y$　　③ $x+y-2$

④ $x-y$　　⑤ $2x+2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2+2xy+y^2)-2(x+y)\\ &= (x+y)^2-2(x+y)\\ &= (x+y)(x+y-2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y-2) &= -(-x-y)(x+y-2)\\ &= \frac{1}{2}(2x+2y)(x+y-2)\end{aligned}$$

21. $(x^2-8x+12)(x^2-7x+12)-6x^2$을 인수분해하면?

① $(x^2-x+2)(x^2-5x+2)$

② $(x^2-5x+12)(x^2-10x+12)$

③ $(x^2-3x+4)(x^2-x+2)$

④ $(x^2+3x+12)(x^2-5x+12)$

⑤ $(x^2+x+12)(x^2-2x+12)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x^2+12)-8x\}\{(x^2+12)-7x\}-6x^2 \\ &= (x^2+12)^2-15x(x^2+12)+50x^2 \\ &= (x^2+12-5x)(x^2+12-10x) \\ &= (x^2-5x+12)(x^2-10x+12)\end{aligned}$$

22. 다음 중 $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$을 옳게 인수분해 한 것은?

① $(a-b)^2(a+b)^2$
② $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$
③ $(a-b)^2(a^2+b^2)$
④ $(a^2-b^2)(a+b)^2$
⑤ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)^2$

해설

$(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$
$=(a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab)$
$=(a-b)^2(a+b)^2$

23. 다음 중 $2x^2-xy-y^2-4x+y+2$의 인수인 것은?

① $2x+y-2$ ② $2x-y+2$ ③ $x-y+1$
④ $x+y-1$ ⑤ $x-2y-1$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2-(y+4)x-y^2+y+2$
$=2x^2-(y+4)x-(y+1)(y-2)$
$=\{2x+(y-2)\}\{x-(y+1)\}$
$=(2x+y-2)(x-y-1)$

24. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

25. $3x^2+2xy-y^2-4y-3$을 인수분해 하면?

① $(x+y+1)(3x+y-3)$
② $(x-y+1)(3x-y-3)$
③ $(3x+y+1)(x-y-3)$
④ $(x+y+1)(3x-y-3)$
⑤ $(x-y-1)(3x-y-3)$

해설

$3x^2+2xy-y^2-4y-3$
$=\{3x-(y+3)\}(x+y+1)$
$=(x+y+1)(3x-y-3)$

26. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\ (\text{단, } a \neq b \neq c)$$

① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 5

해설

$$(\text{준 식})=\frac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(c-b)a^2-(c^2-b^2)a+bc(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(c-b)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=1$$

27. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $(a-b)(b-c)(a-c)$
③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$ ④ $(a-b)(b-c)(c-a)$
⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

(준식) $=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc(c-b)$
$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$
$=(c-b)(a-b)(a-c)$
$=(a-b)(b-c)(c-a)$

28. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$ ② $b-c$ ③ $c-a$

④ $a+b+c$ ⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$= (b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

29. a, b, c가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변 삼각형
② $a=c$인 이등변 삼각형
③ 정삼각형
④ a가 빗변인 직각 삼각형
⑤ b가 빗변인 직각 삼각형

해설

$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$
$a^2b+ab^2-bc(b+c)-ac^2+a^2c=0$
$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)=0$
$(b+c)\left\{a^2+(b-c)a-bc\right\}$
$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$

30. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore\ N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

31. $\dfrac{2012^3+8}{2012\times2010+4}$ 의 값은?

① 2010　② 2011　③ 2012　④ 2013　⑤ 2014

해설

$a=2012$ 라 치환하면,

$$\begin{aligned}\frac{2012^3+8}{2012\times2010+4} &= \frac{a^3+2^3}{a\times(a-2)+4}\\ &= \frac{(a+2)(a^2-2a+4)}{a^2-2a+4}\\ &= 2012+2\\ &= 2014\end{aligned}$$

32. $\dfrac{2012^3+1}{2012\times2011+1}$ 의 값을 a라 할 때, $\dfrac{a+1}{a-1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1007}{1006}$

해설

$a=\dfrac{(2012+1)(2012^2-2012+1)}{(2012^2-2012+1)}$

$=2013$ 이므로

$\therefore \dfrac{a+1}{a-1}=\dfrac{2013+1}{2013-1}=\dfrac{2014}{2012}=\dfrac{1007}{1006}$

33. $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=5$, $a^3+b^3+c^3=2$일 때, abc의 값은?

① $-\frac{5}{3}$ ② 0 ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 1

해설

$a^2+b^2+c^2$
$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$이므로
$5=1-2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ ab+bc+ca=-2$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$이므로
$2-3abc=1\cdot(5+2)$
$\therefore\ abc=-\frac{5}{3}$

34. $x=1001$ 일 때, $\dfrac{x^6-x^4+x^2-1}{x^5+x^4+x+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1000

해설

$$\begin{aligned}\frac{x^6-x^4+x^2-1}{x^5+x^4+x+1} &= \frac{(x^4+1)(x^2-1)}{(x^4+1)(x+1)}\\ &= x-1\\ &= 1001-1\\ &= 1000\end{aligned}$$

35. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$x+y+z=1$을 변형하면

(준식) $=(1-z)(1-x)(1-y)$

$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$

$=1-1+2-3=-1$

36. 실수 x, y가 $xy=6$, $x^2y+xy^2+x+y=63$을 만족시킬 때, x^2+y^2의 값은?

① 13 ② $\frac{1173}{32}$ ③ 55 ④ 69 ⑤ 81

해설

x^2y+xy^2+x+y
$=xy(x+y)+(x+y)$
$=(xy+1)(x+y)$
$=7(x+y)=63$,
$x+y=9$, $xy=6$
$\therefore\ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=81-12=69$

37. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\ &= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)\end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+c+d = 4$

38. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 $A\otimes B$를 $A\otimes B=\dfrac{B}{B-A}$라 할 때, $(x\otimes x^2)+(x^2-x)\otimes(x-1)$을 간단히 하면? (단, $x\neq 0,\ x\neq 1$인 실수)

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$$(x\otimes x^2)=\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{x^2}{x(x-1)}=\frac{x}{x-1}$$

$$\begin{aligned}(x^2-x)\otimes(x-1)&=\frac{x-1}{(x-1)-(x^2-x)}\\&=\frac{x-1}{x-1-x^2+x}\\&=\frac{(x-1)}{-(x^2-2x+1)}\\&=\frac{(x-1)}{-(x-1)^2}\\&=-\frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

$\therefore$(주어진 식) $=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)}=\dfrac{x-1}{x-1}=1$

39. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

(준식) $= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2$

$= (x^2 - 7x - 18)(x^2 + 3x - 18) + 21x^2$

$= \{(x^2 - 18) - 7x\}\{(x^2 - 18) + 3x\} + 21x^2$

$= (x^2 - 18)^2 - 4x(x^2 - 18) - 21x^2 + 21x^2$

$= (x^2 - 18)(x^2 - 4x - 18)$

따라서 $p = -18,\ g = -4$

$\therefore pg = (-18) \times (-4) = 72$

40. 다음 보기 중 $ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$의 인수인 것을 모두 고르면?

㉠ $a-b$	㉡ $b+c$	㉢ $a-c$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ab(b-a)+ac(c-a)+bc(2a-b-c)$
$=ab^2-a^2b+ac^2-a^2c+2abc-b^2c-bc^2$
$=-(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a-bc(b+c)$
$=-(b+c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$
$=-(b+c)(a-b)(a-c)$
$=(a-b)(b+c)(c-a)$

41. 0이 아닌 세 수가 있다. 이들의 합은 0, 역수의 합은 $\frac{3}{2}$, 제곱의 합은 1일 때, 이들 세 수의 세제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

세 수를 x, y, z라 하면 주어진 조건으로부터

$x+y+z=0 \cdots\cdots$ ㉠

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2} \cdots\cdots$ ㉡

$x^2+y^2+z^2=1 \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 이므로

㉠, ㉢에서 $0^2=1+2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xy+yz+zx=-\frac{1}{2} \cdots\cdots$ ㉣

㉡에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{3}{2}$ 이므로

$3xyz=2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ xyz=-\frac{1}{3}$

또, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

㉠에서 $x+y+z=0$ 이므로

$x^3+y^3+z^3=3xyz=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$

42. $a+b+c=0$일 때, $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$a+b+c=0$이면 $a^3+b^3+c^3=3abc$이다.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{a(b+c)}{bc}+\frac{b(a+c)}{ac}+\frac{c(a+b)}{ab}\\ &= \frac{a^2(-a)+b^2(-b)+c^2(-c)}{abc}\\ &= \frac{-\left(a^3+b^3+c^3\right)}{abc}\\ &= \frac{-3abc}{abc}=-3\end{aligned}$$

해설

$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

$=(\frac{a}{b}+\frac{c}{b})+(\frac{b}{c}+\frac{a}{c})+(\frac{b}{a}+\frac{c}{a})$

$=\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+\frac{b+c}{a}$

$=\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+\frac{-a}{a}$ $(\because\ a+b+c=0)$

$=-3$

43. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형　② 이등변삼각형　③ 정삼각형
④ 예각삼각형　⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$= b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서
$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2+2bc+c^2-a^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2 = -a^2+b^2+c^2+2bc$
$2a^2 = 2b^2+2c^2$
$\therefore\ a^2 = b^2+c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

44. 세 양수 a, b, c가 $a^3+b^3+c^3=3abc$를 만족시킬 때 a, b, c를 세 변으로 하는 삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이라고 한다. 이 때, $a+b+c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$에서
$a>0,\ b>0,\ c>0$이므로 $a+b+c\neq 0$
$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$
$\therefore\ \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore\ a=b=c$ ($\because a,\ b,\ c$는 실수)
따라서 a, b, c를 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이고 그 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$,
$a^2=1$
$\therefore\ a=b=c=1$
$\therefore\ a+b+c=3$

45. $a-b=3$, $b-c=1$일 때, $ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$의 값은?

① -14 ② -12 ③ -8 ④ -4 ⑤ 0

해설

$a-b=3 \quad \cdots$㉠, $b-c=1 \quad \cdots$㉡

㉠+㉡에서 $a-c=4$

$\therefore\ ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a$

$=ab(b-a)+c^2(b-a)-c(b^2-a^2)$

$ab(b-a)+(b-a)\{c^2-c(b+a)\}$

$=(b-a)(ab+c^2-bc-ca)$

$=(b-a)\{a(b-c)+c(c-b)\}$

$=(b-a)(b-c)(a-c)$

$=(a-b)(b-c)(c-a)$

$=3\times 1\times(-4)=-12$

46. $a(a+1)=1$일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}=\dfrac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$

$=\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$

$=\dfrac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2}$ $\leftarrow a^2=1-a$ 대입

$=\dfrac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$

47. $a+b+c=0,\ abc \neq 0$ 일 때, $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=0(\because\ a+b+c=0\ )$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore(\text{준식})=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{bc+ca+ab}{abc}\right)$

$=\dfrac{(a+b+c)^2}{3abc}=0$

48. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2-bc=b^2-ac=c^2-ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3+b^3+c^3-3abc$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 0, 2
④ 0, 1 ⑤ 0, 1, 2

해설

$a^2-bc=b^2-ac$ 에서 $(a^2-b^2)+(ac-bc)=0$
$\therefore\ (a+b+c)(a-b)=0\cdots$㉠
$b^2-ac=c^2-ab$ 에서 $(b^2-c^2)+(ab-ac)=0$
$\therefore\ (a+b+c)(b-c)=0\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $a+b+c=0$ 또는 $a=b=c$
한편 $a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 이므로
ⅰ) $a+b+c=0$ 일 때 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$
ⅱ) $a=b=c$ 일 때
(준식)$=3a^3-3a^3=0$
따라서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

49. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

㉠ 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형 ㉡ 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형 ㉢ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형 ㉣ $a=b$ 인 이등변삼각형 ㉤ $b=c$ 인 이등변삼각형

① 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형
② 빗변의 길이가 b 인 직각삼각형
③ 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형
④ $a=b$ 인 이등변삼각형
⑤ $b=c$ 인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$ 에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

$\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}=0$

$(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2=0$

$a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

$=2(a^2+b^2-c^2)=0$

$\therefore a^2+b^2-c^2=0$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c 인 직각삼각형이다.

50. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b=-\sqrt{2}$, $b+c=\sqrt{2}$일 때, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$의 값은?

① 0　② $\sqrt{2}$　③ $-\sqrt{2}$　④ 2　⑤ -2

해설

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)$

$=\{(a-b)+(b-c)+(c-a)\}$

$\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

$-(a-b)(b-c)-(b-c)(c-a)-(c-a)(a-b)\}$

$=0$