

1. $\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = -1$ 을 만족하는 자연수 n 의 값이 아닌 것은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

- ① 2 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 14

해설

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{-2i}\right)^n = i^n$$

$i^n = -1$ 이 성립하려면 $n = 4m + 2$ ($m \geq 0$)

③ : $8 = 4 \times 2 + 0$

2. $x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

3. 직선 $y = mx - 2$ 와 포물선 $y = 2x^2 - 3x$ 가 있다.

- (1) 직선이 포물선에 접하도록 m 의 값을 정하여라.
(2) 직선이 포물선과 두 점에서 만나도록 m 의 값의 범위를 정하여라.
(3) 직선이 포물선과 만나지 않도록 m 의 값의 범위를 정하여라

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1, -7

▷ 정답: $m > 1, m < -7$

▷ 정답: $-7 < m < 1$

해설

직선과 포물선의 교점의 x 좌표를 구하는 식은

$$mx - 2 = 2x^2 - 3x$$

곧, $2x^2 - (m+3)x + 2 = 0$ 이고,

$$D = (m+3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = m^2 + 6m - 7$$

$$= (m-1)(m+7)$$

$$(1) D = (m-1)(m+7) = 0$$

$$\therefore m = 1, -7$$

$$(2) D = (m-1)(m+7) > 0$$

$$\therefore m > 1, m < -7$$

$$(3) D = (m-1)(m+7) < 0$$

$$\therefore -7 < m < 1$$

4. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

- ① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$$\begin{aligned} & y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3 \text{ 에서 } y \text{ 를 소거하면} \\ & x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0 \\ & m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0 \\ & \therefore m < 1, m > 5 \end{aligned}$$

5. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\frac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$

② $2\sqrt{3}$

③ $-3\sqrt{3}$

④ $4\sqrt{3}$

⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} \\ &= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i \\ &= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i \\ &= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i \\ & a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2} \\ & \therefore \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

6. 복소수 z 와 그 켤레복소수 \bar{z} 에 대하여 $z - \bar{z} = 2i$, $\frac{\bar{z}}{z} = -i$ 가 성립할 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 5 ④ 8 ⑤ 13

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수)로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
 $z - \bar{z} = 2i$ 에서 $a + bi - (a - bi) = 2i$, $2bi = 2i$

$\therefore b = 1$

$\frac{\bar{z}}{z} = -i$ 에서 $\frac{a-i}{a+i} = -i$

$\frac{(a-i)^2}{a^2+1} = -i$, $\frac{a^2-1-2ai}{a^2+1} = -i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

(i) 실수부분이 0이어야 하므로

$$\frac{a^2-1}{a^2+1} = 0, a^2-1=0$$

$$\therefore a = \pm 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

(ii) 허수부분이 -1이어야 하므로

$$\frac{-2a}{a^2+1} = -1, a^2+1=2a$$

$$a^2-2a+1=0, (a-1)^2=0$$

$$\therefore a = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에 의하여 $a = 1$

$$\therefore z \cdot \bar{z} = (1+i)(1-i) = 1+1 = 2$$

7. 방정식 $|x-3| + |x-4| = 2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3) - (x-4) = 3, -2x = -5$

$$\therefore x = \frac{5}{2}$$

ii) $3 \leq x < 4$ 일 때

$$(x-3) - (x-4) = 2, 0 \cdot x = 1$$

\therefore 해가 없다.

iii) $x \geq 4$ 일 때

$$x-3 + x-4 = 2, 2x = 9$$

$$\therefore x = \frac{9}{2}$$

따라서 $x = \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

8. $|x+1|+|x-2|=x+3$ 을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

i) $x < -1$ 일 때,
 $-x-1-x+2=x+3$
 $\therefore x = -\frac{2}{3}$ (모순)

ii) $-1 \leq x < 2$ 일 때,
 $x+1-x+2=x+3$
 $\therefore x = 0$

iii) $x \geq 2$ 일 때,
 $x+1+x-2=x+3$
 $\therefore x = 4$

9. 계수가 유리수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 한근이 $2 - \sqrt{3}$ 일 때, $\frac{c-b}{a}$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

계수가 유리수인 이차방정식에서 $2 - \sqrt{3}$ 이 근이면 $2 + \sqrt{3}$ 도 근이므로

$$\text{근과 계수의 관계에 의하여 } -\frac{b}{a} = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$$

$$\frac{c}{a} = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$$

$$\therefore \frac{c-b}{a} = \frac{c}{a} + \left(-\frac{b}{a}\right) = 1 + 4 = 5$$

10. 복소수 $a \pm bi$ ($b \neq 0, i = \sqrt{-1}$)가 삼차방정식 $x^3 + px + q = 0$ 의 허근일 때, 다음 중 p 를 a 와 b 로 옳게 나타낸 것은? (단, a, b, p, q 는 실수)

- ① $a^2 + b^2$ ② $a^2 - 2b^2$ ③ $b^2 - a^2$
 ④ $b^2 - 2a^2$ ⑤ $b^2 - 3a^2$

해설

$x^3 + px + q = 0$ 의 세 근을 $a + bi, a - bi, \alpha$ 라 하자. 근과 계수와의 관계에 의하여

$$(a + bi) + (a - bi) + \alpha = 0 \quad \text{.....㉠}$$

$$(a + bi)(a - bi) + \alpha(a + bi) + \alpha(a - bi) = p \quad \text{.....㉡}$$

$$\alpha(a + bi)(a - bi) = -q \quad \text{.....㉢}$$

㉠에서 $\alpha = -2a$

㉡에서 대입해 정리하면 $p = b^2 - 3a^2$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 x 값이

될 수 없는 것은?

① $2\sqrt{2}$

② $-\sqrt{3}$

③ $\sqrt{5}$

④ $-2\sqrt{2}$

⑤ $-\sqrt{5}$

해설

$$x^2 + xy - 2y^2 = (x - 2y)(x + y) = 0$$

⊕ $x = 2y$ 일 때

$$(2y)^2 + y^2 = 5y^2 = 10$$

$$y^2 = 2, y = \pm\sqrt{2}$$

$$x = 2\sqrt{2}, y = \sqrt{2}$$

$$x = -2\sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$$

⊖ $x = -y$ 일 때

$$(-y)^2 + y^2 = 2y^2 = 10, y^2 = 5, y = \pm\sqrt{5}$$

$$x = -\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$$

$$x = \sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$$

12. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0 \text{에서}$$

$$(x-y)(x+2y) = 0$$

i) $x = y$ 일 때

$$x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$$

$$y = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}, x = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ii) $x = -2y$ 일 때

$$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$$

$$y^2 = 5, y = \pm\sqrt{5}, x = \mp 2\sqrt{5} \text{ (복호동순)}$$

$$\therefore \text{구하는 해는 } \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$$

13. 방정식 $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 와 y 의 곱은?

- ① -2 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0 \text{에서} \\ & (x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 8x + 16) = 0, \\ & (x - 2y)^2 + (x - 4)^2 = 0 \\ & x = 2y, x = 4 \\ & \therefore x = 4, y = 2 \quad \therefore xy = 8 \end{aligned}$$

14. $|x+1|+|y-2|=0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 곱 xy 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$|x+1| \geq 0, |y-2| \geq 0$ 이므로 $x+1=0, y-2=0$
 $\therefore x=-1, y=2$

따라서, 구하는 값은 $xy = -1 \cdot 2 = -2$

15. 이차방정식 $ax(x-1) + bx(x-1) + c(x^2+1) = 0$ 의 두근을 α, β 라 할 때, $\frac{c}{(\alpha-1)(\beta-1)}$ 의 값은?

- ① $\frac{a+b+c}{2}$ ② $a+b+c$ ③ $ab+bc+ca$
 ④ $\frac{ab+bc+ca}{2}$ ⑤ abc

해설

(I) 주어진 식을 정리하면
 $(a+b+c)x^2 - (a+b)x + c = 0$ ($a+b+c \neq 0$)
 $\alpha + \beta = \frac{a+b}{a+b+c}, \alpha\beta = \frac{c}{a+b+c}$

(II) (준식) $= \frac{c}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1}$
 $= \frac{c(a+b+c)}{c - (a+b) + (a+b+c)}$
 $= \frac{c(a+b+c)}{2c} = \frac{a+b+c}{2}$

16. 자연수 n 에 대하여 이차방정식 $n(n+1)x^2 - x + 2006 = 0$ 의 두 근을 α_n, β_n 이라할 때, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2006}) + (\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_{2006})$ 의 값은?

- ① $\frac{2004}{2006}$ ② $\frac{2005}{2006}$ ③ $\frac{2006}{2007}$ ④ $\frac{2007}{2008}$ ⑤ $\frac{2007}{2009}$

해설

$n(n+1)x^2 - x + 2006 = 0$ 의 두 근이 α_n, β_n 이므로

$$\alpha_n + \beta_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

준식 = $(\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + \dots + (\alpha_{2006} + \beta_{2006})$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2006} - \frac{1}{2007}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2007} = \frac{2006}{2007}$$

17. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 + (3a-1)x^2 - 5ax + 2a = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ $-\frac{8}{9}$ ⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3 + (3a-1)x^2 - 5ax + 2a = 0$ 을 인수분해하면

$$(x-1)(x^2 + 3ax - 2a) = 0$$

i) 중근이 $x=1$ 인 경우

$x=1$ 을 $x^2 + 3ax - 2a$ 에 대입하면 0이 된다.

$$1 + 3a - 2a = 0$$

$$\therefore a = -1$$

ii) $x^2 + 3ax - 2a = 0$ 이 중근을 갖는 경우

$$\text{판별식 } D = 9a^2 + 8a = 0, \quad a(9a + 8) = 0,$$

$$\therefore a = 0, \quad a = -\frac{8}{9}$$

$$-1 + 0 - \frac{8}{9} = -\frac{17}{9}$$

18. 삼차방정식 $x^3 + (p-4)x - 2p = 0$ 의 중근을 α , 다른 한 근을 β 라 할 때 $\alpha + \beta + p$ 의 값을 구하면?

- ① -10 또는 -2 ② -10 또는 -1 ③ -10 또는 2
④ -10 또는 4 ⑤ -10 또는 5

해설

$f(x) = x^3 + (p-4)x - 2p$ 로 놓으면 $f(2) = 0$ 이므로
 $f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + p) = 0$
따라서 $x = 2, x^2 + 2x + p = 0$
그런데 중근을 가져야 하므로
i) $x = 2$ 가 $x^2 + 2x + p$ 의 근일 때
 $2^2 + 2 \times 2 + p = 0$
 $\therefore p = -8, f(x) = (x-2)(x^2 + 2x - 8) = (x-2)^2(x+4)$
 $\therefore \alpha = 2, \beta = -4$
따라서, $\alpha + \beta + p = 2 + (-4) + (-8) = -10$
ii) $x^2 + 2x + p = 0$ 이 중근을 가질 때
 $D/4 = 0$ 이므로 $D/4 = 1 - p = 0$
 $\therefore p = 1, f(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 1) = (x-2)(x+1)^2$
 $\therefore \alpha = -1, \beta = 2, p = 1$
따라서, $\alpha + \beta + p = -1 + 2 + 1 = 2$
i) ii)로부터 $\alpha + \beta + p$ 의 값은 -10 또는 2이다.