1. 다항식 $A = x^2 - x + 1$, $B = 3x^2 - 2x - 1$에 대하여 $X + 2A = B$를 만족하는 다항식 X를 구하면?

① $x^2 + 3x + 1$　② $x^2 - 1$　③ $x^2 - 3$
④ $x^2 + 1$　⑤ $2x^2 - x + 1$

해설

$X = B - 2A$
$= (3x^2 - 2x - 1) - 2(x^2 - x + 1)$
$= x^2 - 3$

해설

2. $(125^2 - 75^2) \div \{5 + (30 - 50) \div (-4)\}$ 의 값은?

① 75　② 125　③ 900　④ 1000　⑤ 1225

해설

$$\begin{aligned} 125^2 - 75^2 &= (125 + 75)(125 - 75) \\ &= 200 \times 50 = 10000 \end{aligned}$$

$$5 + (30 - 50) \div (-4) = 5 + -\frac{20}{-4} = 10$$

(준 식)$= 10000 \div 10 = 1000$

3. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$=6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$
$=6x^3+x^2-4x-3$
$\therefore\ f(1)=6+1-4-3=0$

해설

$f(x)=(2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$f(1)=(2+3+2)(3-4)+(2+5)=-7+7=0$

4. 두 복소수 $z_1 = a + (3b - 1)i$, $z_2 = (b + 1) - 5i$에 대하여 $z_1 = \bar{z}_2$가 성립할 때, 실수 a, b에 대하여 $a + b$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$a + (3b - 1)i = (b + 1) + 5i$에서

$\begin{cases} a = b + 1 \\ 3b - 1 = 5 \end{cases}$ 이므로 연립하면

$a = 3,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 5$

5. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$ ② $a\geq 1$ ③ $-1<a<1$
④ $a>1$ ⑤ $a\geq -1$

해설
$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.
$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$
$1-2+a>0$
$\therefore\ a>1$

6. x 축 위의 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(12,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $5\ :\ 3$ 으로 내분하는 점을 P, $3\ :\ 7$ 로 외분하는 점을 Q 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점의 좌표는?

① $(-5,\ 0)$ ② $(-4,\ 0)$ ③ $(5,\ 0)$
④ $(4,\ 0)$ ⑤ $(-1,\ 0)$

해설

그림에서 내분점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 는

$$x = \frac{60-12}{5+3} = 6,\quad y = \frac{0+0}{5+3} = 0$$

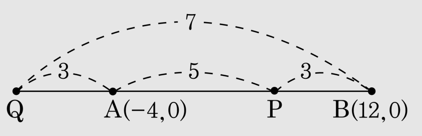
$\therefore\ \mathrm{P}(6,\ 0)$

외분점 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ 는

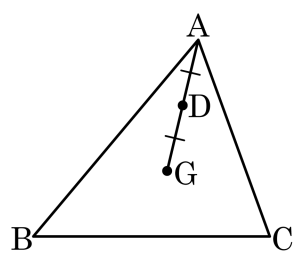
$$x = \frac{36+28}{3-7} = \frac{64}{-4} = -16,\ y = 0$$

$\therefore\ \mathrm{Q}(-16,\ 0)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\mathrm{M}\left(\frac{6-16}{2},\ 0\right) = (-5,\ 0)$



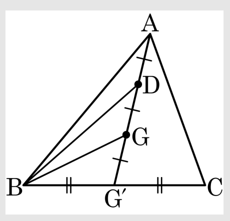
7. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이고 점 D는 $\overline{AG}$의 중점일 때, $\dfrac{\triangle DBG}{\triangle ABC}$의 값은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{1}{6}$　⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{AG}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만난 점을 G′이라고 하면



$\overline{BG'} = \overline{G'C}$에서

$\triangle ABG' = \dfrac{1}{2}\triangle ABC$

$\overline{DG} = \dfrac{1}{3}\overline{AG'}$이므로

$\triangle DBG = \dfrac{1}{3}\triangle ABG'$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2}\triangle ABC$

$= \dfrac{1}{6}\triangle ABC$

$\therefore \dfrac{\triangle DBG}{\triangle ABC} = \dfrac{1}{6}$

8. 세 직선 $2x-y-4=0,\ x-2y-2=0,\ y=ax+2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$2x-y-4=0 \cdots$ ㉠

$x-2y-2=0 \cdots$ ㉡

$y=ax+2 \quad \cdots$ ㉢이라 할 때,

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $x=2,\ y=0$

두 직선의 교점 $(2,\ 0)$ 이 직선 $y=ax+2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$0=2a+2,\ 2a=-2$

$\therefore \quad a=-1$

9. 다음 식을 인수분해하면 $x^4 - 3x^2y^2 + 4y^4 = (x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라. (a, b, c, d는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + 2y^2)^2 - 7x^2y^2 \\
&= (x^2 + \sqrt{7}xy + 2y^2)(x^2 - \sqrt{7}xy + 2y^2)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a + b + c + d = 4$

10. $a=(1+i)^n$ 을 양의 실수가 되게 하는 최소의 자연수 n 의 값과 그 때의 a 의 값의 합을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$(1+i)^n=\{(1+i)^2\}^{\frac{n}{2}}=(2i)^{\frac{n}{2}}=2^{\frac{n}{2}}\cdot i^{\frac{n}{2}}$

$i^{\frac{n}{2}}$ 이 양의 실수가 되는 최소의 n 의 값은 $i^4=1$ 이므로 $\frac{n}{2}=4$

$\therefore\ n=8$

$\therefore\ a=(2i)^4=16$

$\therefore\ n=8,\ a=16$

$\therefore\ n+a=24$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2 + (a+2i)x + b + 4i = 0$ (a, b 는 실수) 의 두 근이 같을 때, $a+b$ 의 값은?

① -5 ② 5 ③ -7 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x^2 + (a+2i)x + b + 4i = 0$ 의 두 근이 같으므로
$D = (a+2i)^2 - 4(b+4i) = 0$
$\therefore\ (a^2 - 4b - 4) + 4(a-4)i = 0$
$a,\ b$ 는 실수이므로 복소수의 상등에 관한 정의에 따라
$a^2 - 4b - 4 = 0,\quad 4(a-4) = 0$
연립하여 풀면,
$a = 4,\ b = 3 \quad \therefore\ a + b = 7$

12. 이차다항식 $f(x)$에 대하여 방정식 $f(x)=0$의 두근의 합이 12일 때, 이차방정식 $f(2x)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

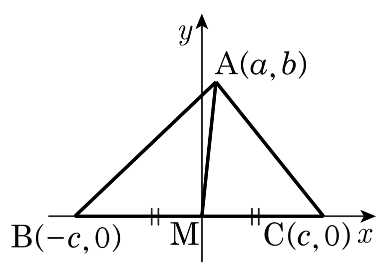
▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하고
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$라 놓으면
$f(2x)=a(2x-\alpha)(2x-\beta)=0$
$a\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$, $\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\left(x-\frac{\beta}{2}\right)=0$
$\alpha+\beta=12$ 이므로
이 방정식의 두 근 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$ 의 합은
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{12}{2}=6$

13. $\triangle$ABC 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2 = 2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$ 이 성립함을 보이는 것이다. (가), (나), (다)에 들어갈 말을 차례로 나열한 것은?



다음 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 를 x 축 위에 놓고
$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점 M 을 y 축이 지난다고 가정하면
M 은 원점이 된다.
또, $\overline{\mathrm{AB}}^2 =$ (가), $\overline{\mathrm{AC}}^2 =$ (나)
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 =$ (가) + (나)
$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$
$\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2 =$ (다)
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 2(\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2)$

① $a+b+c$, $a+b-c$, $a+b+c$

② $(a+c)^2+b^2$, $(a-c)^2+b^2$, $a+b+c$

③ $a+b+c$, $a+b-c$, $a^2+b^2+c^2$

④ $(a+c)^2+b^2$, $(a-c)^2+b^2$, $a^2+b^2+c^2$

⑤ $2(a+c)^2+b^2$, $2(a-c)^2+b^2$, $a^2+b^2+c^2$

해설

(가) $= (a+c)^2 + b^2$
(나) $= (a-c)^2 + b^2$
(다) $= a^2 + b^2 + c^2$

14. 두 직선 $y = 3x + 2$, $x - ay - 7 = 0$ 이 서로 수직이 되도록 상수 a의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

두 직선이 서로 수직이면 기울기의 곱이 -1이다.

$\therefore\ 3 \times \dfrac{1}{a} = -1 \ \Rightarrow\ a = -3$

15. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 3$

해설

$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$ 이므로 $|2 + k| = 5$ 이다.

따라서 $k = 3$ ($\because$ k 는 양수)

16. 점 A(2, 0) 를 지나고 직선 $y=2x+1$ 에 수직인 직선을 l_1 , 점 B(−4, 0) 를 지나고 직선 $y=2x+1$ 에 수직인 직선을 l_2 라고 할때, 두 직선 l_1 , l_2 사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

두 직선 l_1 , l_2 는 평행하므로
두 직선 사이의 거리는 직선 l_2 위의 한 점 B 와 직선 l_1 사이의 거리와 같다.
직선 l_1 은 직선 $y=2x+1$ 과 수직이고
점A(2, 0) 을 지나므로 직선 l_1 의 직선의 방정식은
$y=-\frac{1}{2}(x-2)$
$\therefore x+2y-2=0$
따라서, 점 B(−4, 0) 과 직선 l_1 사이의 거리는
$\frac{|-4+0-2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

17. 원 $x^2+y^2-4ax+2ay+30a-48=0$ 의 넓이가 최소일 때, 이 원의 중심의 좌표가 (p, q) 이다. 이 때 $p+q$ 의 값은?

① -9 ② -6 ③ -3 ④ 3 ⑤ 6

해설

$x^2+y^2-4ax+2ay+30a-48=0$ 을
표준형으로 고치면
$(x-2a)^2+(y+a)^2=5a^2-30a+48$
이 원의 넓이는
$\pi(5a^2-30a+48)=5\pi(a-3)^2+3\pi$
따라서 $a=3$ 일 때 넓이가 최소.
중심은 $(6,-3)$
$\therefore p=6,\ q=-3$
$\therefore p+q=3$

18. 두 점 $A(0,\ -1)$, $B(0,\ 2)$ 에 이르는 거리의 비가 $1:2$ 인 점 $P(x,\ y)$ 가 나타내는 도형의 길이를 구하면?

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 4π ⑤ 6π

해설

$\overline{AP} : \overline{BP} = 1 : 2$
$\Rightarrow\ \overline{BP} = 2\overline{AP}$
$\Rightarrow\ \overline{BP}^2 = 4\overline{AP}^2$
$\Rightarrow\ x^2 + (y-2)^2 = 4\left\{x^2 + (y+1)^2\right\}$
$\Rightarrow\ x^2 + y^2 + 4y = 0$
$\Rightarrow\ x^2 + (y+2)^2 = 4$
반지름이 2 인 원이므로 도형의 길이는 4π

19. 두 원 $x^2+y^2-4x=0$, $x^2+y^2-6x-2y+8=0$ 의 두 교점과 점$(1,\ 0)$ 을 지나는 원의
방정식을 바르게 구한 것은?

① $x^2+y^2-8x-y-4=0$

② $x^2+y^2-8x-4y+16=0$

③ $x^2+y^2-5x-y+16=0$

④ $x^2+y^2-5x-4y+16=0$

⑤ $x^2+y^2-5x-y+4=0$

해설

문제에서 주어진 두 원의 교점을
지나는 임의의 원
또는 직선의 방정식은
$(x^2+y^2-4x)m+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$ 이다.
위 방정식이 나타내는 원이 점 $(1,0)$ 을 지나므로
$x=1$, $y=0$ 을 대입하면
$-3m+3=0$
$\therefore m=1$
$(x^2+y^2-4x)+(x^2+y^2-6x-2y+8)=0$
$2x^2+2y^2-10x-2y+8=0$,
$x^2+y^2-5x-y+4=0$

20. 중심이 C(1, 2) 이고, 직선 L : $x+2y=0$ 에 접하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=5$　② $(x-1)^2+(y-2)^2=6$
③ $(x-1)^2+(y-2)^2=7$　④ $(x-1)^2+(y-2)^2=8$
⑤ $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

해설

중심에서 접선까지의 거리가
원의 반지름과 같으므로
반지름은 $\dfrac{|1+4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$
$\therefore$ 구하는 원의 방정식은
$(x-1)^2+(y-2)^2=5$

21. 원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

원 $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ 을
표준형으로 고치면 $(x-1)^2+(y+2)^2=8$ 이므로
중심이 $(1,\ -2)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이다.
원의 중심 $(1,\ -2)$ 에서 직선 $x-y+3=0$ 에 이르는 거리 d 는

$$\frac{|1-(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

따라서 원 위의 점에서 직선 $x-y+3=0$ 에
이르는 거리의 최솟값은
$d-$ (반지름의 길이)$=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

22. $x^3 - x^2 + 2 = a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$가 x에 대한항등식이 되도록 실수 $a+b+c+p$의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 0

해설

양변에 $x = p$를 대입하면
$p^3 - p^2 + 2 = 0$
$(p+1)(p^2 - 2p + 2) = 0 \therefore\ p = -1$
따라서 주어진 식은
$x^3 - x^2 + 2 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)$
양변에 $x = 0$을 대입하면 $2 = a + b + c$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

해설

$a(x-p)^3 + b(x-p)^2 + c(x-p)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
$\therefore\ (x+1)(x^2 - 2x + 2)$
$= (x-p)\left\{a(x-p)^2 + b(x-p) + c\right\}$
양변을 비교하면, $x + 1 = x - p$,
$x^2 - 2x + 2 = a(x-p)^2 + b(x-p) + c$
$\therefore\ p = -1$
또 $x^2 - 2x + 2 = a(x+1)^2 + b(x+1) + c$
$= ax^2 + (2a+b)x + a + b + c$
$\therefore\ a = 1,\ 2a + b = -2,\ a + b + c = 2$
$\therefore\ b = -4,\ c = 5$
따라서 $a = 1,\ b = -4,\ c = 5,\ p = -1$
$\therefore\ a + b + c + p = 1$

23. x에 대한 다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x+b)$, $(x+b)(x-c)$, $(x-c)(x-a)$로 나눈 나머지가 각각 $x+2$, $-x+4$, 0일 때, 상수 a, b, c의 곱을 구하면?

① 8 ② −8 ③ 12 ④ −12 ⑤ 16

해설

$f(x) = (x-a)(x+b)P(x) + x + 2 \cdots$ ①
$= (x+b)(x-c)Q(x) - x + 4 \cdots$ ②
$= (x-c)(x-a)R(x) \cdots$ ③

나머지 정리에 의해

i) ① 에서 $f(a) = a + 2$, ③ 에서
$f(a) = 0$
$\Rightarrow a = -2$

ii) ① 에서 $f(-b) = -b + 2$, ② 에서
$f(-b) = b + 4$
$\Rightarrow b = -1$

iii) ② 에서 $f(c) = -c + 4$, ③ 에서
$f(c) = 0$
$\Rightarrow c = 4$
$\therefore abc = 8$

24. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 A$(-2, 0)$, B$(4, -2)$로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① $(-1, 1)$ ② $(0, 2)$ ③ $(1, 3)$
④ $(2, 4)$ ⑤ $(3, 5)$

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 P$(a,\ a+2)$라고 놓을 수 있다.
$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$이므로
$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$
$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$
$8a = 24$
$\therefore\ a = 3$
$\therefore$ P$(3,\ 5)$

25. 제1 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 r 인 원의 중심을 C_1, 제2 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}r$ 인 원의 중심을 C_2, 제3 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}r$ 인 원의 중심을 C_3, 제4 사분면에서 x 축과 y 축에 동시에 접하면서 반지름의 길이가 $\frac{1}{8}r$ 인 원의 중심을 C_4 라 하자.
$\overline{\mathrm{C_1C_2}} + \overline{\mathrm{C_2C_3}} + \overline{\mathrm{C_3C_4}} = 14\sqrt{10}$ 일 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\mathrm{C_1}\,(r, r)$, $\mathrm{C_2}\left(-\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}r\right)$,

$\mathrm{C_3}\left(-\frac{1}{4}r, -\frac{1}{4}r\right)$, $\mathrm{C_4}\left(\frac{1}{8}r, -\frac{1}{8}r\right)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{C_1C_2}} + \overline{\mathrm{C_2C_3}} + \overline{\mathrm{C_3C_4}}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}r\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}r\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4}r\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}r\right)^2}$$
$$+ \sqrt{\left(\frac{3}{8}r\right)^2 + \left(\frac{1}{8}r\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{2}r + \frac{\sqrt{10}}{4}r + \frac{\sqrt{10}}{8}r$$
$$= \frac{7\sqrt{10}}{8}r = 14\sqrt{10}$$
$$\therefore r = 16$$