1. 두 점 A(1, 2), B(3, −2)를 이은 $\overline{AB}$의 B방향으로의 연장선 위에 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$을 만족시키는 점 C의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

점 C는 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이므로
C(5, −6)이다.
$\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + (-6)^2 = 61$

2. 원 $x^2+y^2-4x-6y-3=0$의 중심이 (a,b), 반지름의 길이가 r일 때, $a+b+r$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$x^2+y^2-4x-6y-3=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-2)^2+(y-3)^2=16$
따라서, 중심은 $(2,3)$
반지름의 길이가 4 이므로
$a=2,\ b=3,\ r=4$
$\therefore\ a+b+r=9$

3. x에 대한 다항식 $(4x^2-3x+1)^5$을 전개하였을 때, 모든 계수들(상수항 포함)의 합은?

① 0 ② 16 ③ 32 ④ 64 ⑤ 1024

해설

$(4x^2-3x+1)^5$을 전개하여 x에 대한 내림차순으로 정리하면
$(4x^2-3x+1)^5 = a_0x^{10}+a_1x^9+a_2x^8+\cdots+a_9x+a_{10}$과 같이 된다.
여기서 모든 계수들의 합
$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$을 구하려면
$x=1$을 대입하면 된다.
즉, $(4-3+1)^5 = a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$
모든 계수들의 합은 $2^5=32$

4. 직선 $5x+2y+1=0, 2x-y+4=0$의 교점을 지나고, 직선 $x+y+1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $x+y+3=0$ ② $x-y+3=0$ ③ $x+y-3=0$
④ $x-y-3=0$ ⑤ $2x+y+3=0$

해설

두 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$(5x+2y+1)+k(2x-y+4)=0$
$\therefore\ (5+2k)x+(2-k)y+(1+4k)=0 \cdots$㉠
이 직선이 $x+y+1=0$ 에 수직이므로
$(-1)\times\dfrac{2k+5}{k-2}=-1$
$\therefore\ k=-7 \cdots$㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는
직선의 방정식은 $x-y+3=0$
(보충)
두 직선 $ax+by+c=0,\ \ a'x+b'y+c'=0$ 의
교점을 지나는 직선은
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$

5. 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a+b)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

$(a,\ b)$가 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점이고,
또 점$(a,\ b)$와 직선 사이의 거리를 l이라 하면,

$a = b^2 + 1 \cdots\cdots$ ㉠

$l = \dfrac{|a - b + 1|}{\sqrt{2}} \cdots$ ㉡

㉠를 ㉡에 대입하면

$l = \dfrac{|b^2 - b + 2|}{\sqrt{2}} = \dfrac{\left|\left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ b = \dfrac{1}{2}$일 때 l이 최소가 된다.

따라서 $a + b = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{4}$이므로

$\therefore\ 4(a+b) = 7$

6. 복소수 $z = a + bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b) + (2b-3a)i \cdots ㉠$$

㉠이 실수이려면 $2b = 3a$

$\therefore\ b = \frac{3}{2}a$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

7. 다음의 x, y 에 대한 이차방정식 중 원의 방정식을 나타내지 <u>않은</u> 것은?

① $x^2+y^2+x+2y+1=0$ ② $x^2+y^2+x+2y+2=0$

③ $x^2+y^2+2x+y+1=0$ ④ $x^2+y^2-2x+4y+3=0$

⑤ $x^2+y^2-2x+4y+4=0$

해설

① $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{1}{4}$

② $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=-\frac{3}{4}$

③ $(x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

④ $(x-1)^2+(y+2)^2=2$

⑤ $(x-1)^2+(y+2)^2=1$

8. x 축에 접하고 두 점 $(3,1),\ (-4,8)$ 을 지나는 원 중, 반지름의 크기가 큰 원의 방정식을 구하면?

① $(x-3)^2+(y-12)^2=169$ ② $x^2+(y-5)^2=169$

③ $x^2+(y-5)^2=25$ ④ $(x-8)^2+(y-13)^2=169$

⑤ $(x-8)^2+(y-13)^2=25$

해설

구하는 원의 중심을 (a,b) 라고 하면
x 축에 접하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
이 원이 두 점 $(3,1),\ (-4,8)$ 을 지나므로
$(3-a)^2+(1-b)^2=b^2\cdots\cdots$㉠
$(-4-a)^2+(8-b)^2=b^2\cdots\cdots$㉡
㉠ − ㉡에서
$b=a+5\cdots\cdots$㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$a^2-8a=a(a-8)=0$
$\therefore\ a=0$ 또는 $a=8$
㉢에서 $a=0$ 일 때 $b=5$, $a=8$ 일 때 $b=13$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+(y-5)^2=5^2$
또는$(x-8)^2+(y-13)^2=13^2$

9. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2+\square x+\square=A$ 라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$ 이므로

$\square$ 안에 알맞은 수는 차례대로 $1,\ 2,\ -1$ 이다.

10. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

11. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

x에 대한 항등식이므로
$x=1$일 때, $2=c\cdots\cdots$㉠
$x=2$일 때, $9=b+c\cdots\cdots$㉡
$x=3$일 때, $28=2a+2b+c\cdots\cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=7$, $c=2$
$\therefore\ a+b+c=15$

12. 이차 이상의 다항식 $p(x)$를 $x-2007$와 $x-2008$으로 나눈 나머지는 각각 2007와 2008이다. $p(x)$를 $(x-2007)(x-2008)$으로 나눈 나머지는?

① 2007×2008　② $2007x$

③ $2008x$　④ $x-2007\times2008$

⑤ x

해설

$p(x)$를 $(x-2007)(x-2008)$으로 나눌 때의
몫과 나머지를 각각 $q(x)$와 $ax+b$라 놓으면
$p(x)=(x-2007)(x-2008)q(x)+ax+b\cdots\cdots$㉠
나머지정리에 의해
$p(2007)=2007,\ p(2008)=2008$이므로
㉠의 x에 2007와 2008을 대입하면
$2007a+b=2007,\ 2008a+b=2008$
$\therefore\ a=1,\ b=0$
그러므로 구하는 나머지는 x

13. $\dfrac{1999^3-1}{1999\times 2000+1}$ 을 계산하면?

① 1920 ② 1909 ③ 1998 ④ 1892 ⑤ 2000

해설

$x=1999$ 라 하면,

$$\begin{aligned}\frac{1999^3-1}{1999\times 2000+1} &= \frac{x^3-1}{x(x+1)+1}\\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1}\\ &= x-1\\ &= 1998\end{aligned}$$

14. 복소수 $z=(1+i)x^2+(5+2i)x+3(2-i)$ 에서 z가 순허수일 때, 실수 x의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$z=(x^2+5x+6)+(x^2+2x-3)i$
$=(x+2)(x+3)+(x-1)(x+3)i$
순허수가 되려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$
$\therefore\ x=-2$

15. x, y가 양의 실수이고, $x^2+xyi+y^2-5-2i=0$일 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.

$(x^2+y^2-5)+(xy-2)i=0$

$x^2+y^2-5=0\cdots$㉠

$xy-2=0\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=5+4=9$

$\therefore\ x+y=3$ ($\because\ x$, y 는 양의 실수)

16. $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$$
$$=\{1+(-i)+(-1)+i\}+\{1+(-i)+(-1)+i\}+1$$
$$=1$$

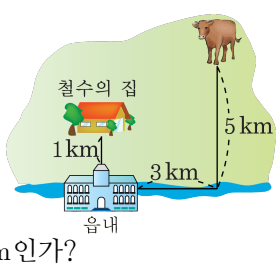
17. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$일 때, 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -36 ② -18 ③ 18 ④ 24 ⑤ 36

해설

a, b가 실수이므로
이차방정식의 한 근이 $2 + \sqrt{5}i$이면
다른 한 근은 $2 - \sqrt{5}i$이다.
근과 계수의 관계의 의하여
$-a = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 4$
$\therefore a = -4$
$b = (2 + \sqrt{5}i)(2 - \sqrt{5}i) = 9$
$\therefore ab = -36$

18. 철수의 집은 읍내로부터 정북으로 1 km 떨어져 있다. 그리고 작은 시냇물이 정동에서 정서로 읍내를 관통해서 흐르고 있다. 지금 철수는 읍에서 정동으로 3 km, 정북으로 5 km 떨어진 곳에서 소에게 풀을 먹이고 있다. 이때 철수가 시냇가로 가서 소에게 물을 먹이고 집으로 가는 최단 거리는 몇 km인가?



① 3 km ② $4\sqrt{3}$ km ③ $3\sqrt{5}$ km

④ $4\frac{5}{6}$ km ⑤ 2.5 km

해설

위의 문제 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

집의 위치는 A(0, 1), 철수의 현위치는 B(3, 5)
따라서 시냇가의 어느 한 지점 P까지 와서 집까지 가는 거리는 $\overline{BP} + \overline{AP}$이다.
이 거리가 가장 짧으려면 A의 대칭점 A′(0, −1)과 B를 잇는 $\overline{A'B} = \overline{BP'} + \overline{A'P'}$이 가장 짧은 거리이다.
$\therefore\ \overline{A'B} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

19. 평행사변형 ABCD에서 A$(2,3)$, B$(-5,4)$, C$(-2,5)$, D(a,b)라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

해설

$\overline{BA} /\!/ \overline{CD}$ 이므로
점 B에서 점 A로의 이동을 생각할 때
x축 방향으로 $+7$, y축 방향으로 -1인 것을
점 C에서 점 D로의 이동에 적용시킬 수 있다
$\therefore$ D$(a,\ b) = (-2+7, 5-1) = (5,4)$
$\therefore\ a+b=9$

20. $x+ay+1=0$이 $2x-by+1=0$과는 수직이고 직선 $x-(b-3)y-1=0$과는 평행일 때, a^2+b^2의 값은 ?

① 5　② 7　③ 10　④ 13　⑤ 15

해설

$x+ay+1=0 \quad \cdots ㉠$

$2x-by+1=0 \quad \cdots ㉡$

$x-(b-3)y-1=0 \cdots ㉢$

㉠, ㉡ 은 수직이므로,

$1\times 2+a(-b)=0 \quad \therefore \ ab=2$

㉠, ㉢ 은 평행이므로 $a=-(b-3)$

$\therefore \ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5$

21. 점 $\mathrm{P}(a, 0)$에서 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$에 그은 접선의 길이가 4일 때, 점 P의 좌표를 모두 구하면?

① $(1,0)$, $(7,0)$ ② $(-1,0)$, $(7,0)$ ③ $(1,0)$, $(-7,0)$
④ $(-1,0)$, $(5,0)$ ⑤ $(1,0)$, $(-5,0)$

해설

원의 중심을 $\mathrm{C}(3,2)$, 접점을 Q라 하면
$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{(a-3)^2+2^2}$
CPQ는 직각삼각형이므로
$(a-3)^2+4=2^2+4^2$
$a^2-6a-7=0$
$(a+1)(a-7)=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=7$
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $(-1,0)$, $(7,0)$이다.

22. $a+b+c=1$을 만족하는 세 실수 a, b, c에 대하여 $x=a-2b+3c$, $y=b-2c+3a$, $z=c-2a+3b$라 할 때, $(x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$a+b+c=1$이므로

$x+y+z=2a+2b+2c=2(a+b+c)=2$

$\therefore\ (x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+3$

$=(x+y+z)^2+3$

$=2^2+3=4+3=7$

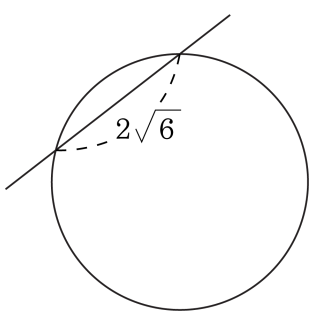
23. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 x의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$과 같다. a, b의 값을 구하면?

① $a=3,\ b=-2$
② $a=0,\ b=-\frac{1}{2}$
③ $a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3}$
④ $a=2,\ b=-\frac{1}{4}$
⑤ $a=1,\ b=\frac{1}{2}$

해설

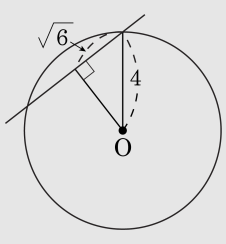
$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha+\beta=-a\cdots\cdots$ ①
$\alpha\beta=b\cdots\cdots$ ②
$\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$이므로
$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=-a\cdots\cdots$ ③
$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\times\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=b\cdots\cdots$ ④
③에서 $\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-a$
$\therefore\ -a+\frac{-a}{b}=-a \quad \therefore\ -\frac{a}{b}=0 \quad \therefore\ a=0$
④에서 $\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=b,\ \ b+\frac{1}{b}+2=b,$
$\frac{1}{b}+2=0 \quad \therefore\ b=-\frac{1}{2}$
$\therefore a=0,\ b=-\frac{1}{2}$

24. 원 $x^2+y^2=16$ 이 직선 $l: ax-y-5(a-1)=0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 정수 a 의 값은?



① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설



원의 중심에서 직선까지 거리

$\sqrt{4^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{10}$

$ax-y-5(a-1)=0$ 에서

$$\frac{|-5(a-1)|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$$

$25(a-1)^2=10(a^2+1)$, $15a^2-50a+15=0$

$3a^2-10a+3=0$

$(3a-1)(a-3)=0$

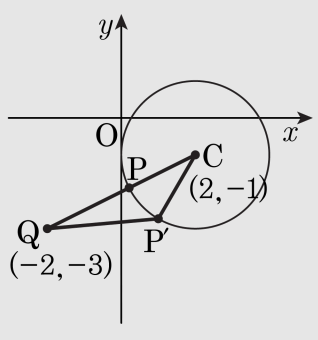
$\therefore\ a=3$

25. 방정식 $x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$이 나타내는 원 중 최대인 원을 C라 할 때, C 위의 점 P에서 점 $Q(-2, -3)$ 까지의 거리의 최솟값을 구하면?

① $2(\sqrt{2}-1)$ ② $2(\sqrt{3}-1)$ ③ $2(\sqrt{5}-1)$
④ $2(\sqrt{6}-1)$ ⑤ $2(\sqrt{7}-1)$

해설

$x^2 + y^2 + 2(m-1)x - 2my + 3m^2 - 2 = 0$ 에서
$\{x + (m-1)\}^2 + (y-m)^2 = -m^2 - 2m + 3$
반지름의 길이를 r 라고 하면
$r^2 = -m^2 - 2m + 3 = -(m+1)^2 + 4$
즉, $m = -1$ 일 때, $r = 2$ 로 최대이다.



한편, 원 C의 중심을 O라 할 때 그림에서와 같이
$\overline{CQ}$와 원 C의 교점을 P라 하면,
원, C 위의 임의의 점 P′에 대하여
$\overline{CP} = \overline{CP'} = 2$이고
$\overline{CQ} = \overline{CP} + \overline{PQ} \le \overline{CP'} + \overline{P'Q}$이므로
$\overline{PQ} \le \overline{P'Q}$
따라서, P가 $\overline{CQ}$와 원 C의 교점일 때,
$\overline{PQ}$의 길이가 최소이다.
중심 $(2, -1)$과 점 $Q(-2, -3)$까지의 거리는
$\sqrt{(2+2)^2 + (-1+3)^2} = 2\sqrt{5}$
따라서, $\overline{PQ}$의 최솟값은 $2\sqrt{5} - 2 = 2(\sqrt{5}-1)$