1. 이차방정식 $x^2 - 10x + k = 0$의 두 근의 비가 $2 : 3$이 되도록 상수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α라 하면
다른 한 근은 3α가 되므로

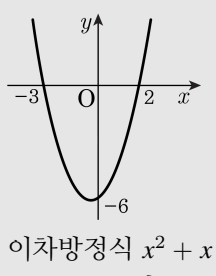
$$\begin{cases} 2\alpha + 3\alpha = 10 & \cdots\cdots ① \\ 2\alpha \times 3\alpha = k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 풀면
$\alpha = 2,\ k = 6 \times 2^2 = 24$

2. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2 + x - 6 > 0$을 풀면?

① $x < -3$ 또는 $x > 2$
② $x < -2$ 또는 $x > 3$
③ $x < -1$ 또는 $x > 4$
④ $x < 0$ 또는 $x > 5$
⑤ $x < 1$ 또는 $x > 6$

해설



이차방정식 $x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $(x+3)(x-2) = 0$
$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
$f(x) = x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고
이차부등식 $f(x) > 0$의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 2$

3. $z = 1 - i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z}-1}{z} - \dfrac{z-1}{\bar{z}}$ 의 값은?

① $-i$　　② i　　③ $-2i$　　④ $2i$　　⑤ 1

해설

$z = 1 - i, \bar{z} = 1 + i$

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{i}{1-i} - \dfrac{-i}{1+i} = \dfrac{2i}{2} = i$

4. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \Rightarrow x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$
이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \Rightarrow k+1=\pm 4$
$\therefore k=3\ (\because k>0)$

5. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$
$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

6. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25 ② 20 ③ 10 ④ 7 ⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$
$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$
$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

7. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x - y = 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x = y + 1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2 + y^2 = 5$

$y^2 + y - 2 = 0$

$(y+2)(y-1) = 0$

$\therefore\ y = -2$ 또는 $y = 1$

$y = -2$를 ㉠에 대입하면 $x = -1$

$y = 1$을 ㉡에 대입하면 $x = 2$

$\therefore\ xy = 2$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3,\ xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

9. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\dfrac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$　② $2\sqrt{3}$　③ $-3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$　⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$
$= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i$
$= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i$
$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i$
$a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2}$
$\therefore \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$

10. $f(x) = x^{61} + x^{47} + 1$ 이라고 할 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

(단, $i = \sqrt{-1}$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = f(-i) = (-i)^{61} + (-i)^{47} + 1 = 1$

$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = i^{61} + i^{47} + 1 = 1$

11. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$

$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$

$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$

$\therefore\ a = -2, b = -4$

$\therefore\ a + b = -6$

12. $a<0,\ b<0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$　　② $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$

③ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　　④ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

해설

$a=-\alpha,\ b=-\beta(\alpha>0,\ \beta>0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{\alpha^2(-\beta)}=\alpha\sqrt{-\beta}=-a\sqrt{b}$

② $\begin{aligned}\sqrt{a^3b}&=\sqrt{(\alpha)^3(-\beta)}\\&=\alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}\\&=-a\sqrt{ab}\end{aligned}$

③ $\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}&=\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}\\&=\sqrt{\alpha}i\cdot\sqrt{\beta}i\\&=\sqrt{\alpha\beta}i^2\\&=-\sqrt{\alpha\beta}\\&=-\sqrt{ab}\end{aligned}$

④ $\begin{aligned}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}&=\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}}\\&=\frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i}\\&=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{b}{a}}\end{aligned}$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2}=\alpha\beta=ab$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

14. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0$, $b < 0$

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서

$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

15. 이차방정식 $3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{5}}{3}$　② $\frac{2\sqrt{5}}{3}$　③ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$　④ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$　⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

해설

$3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-\frac{4}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{2}{3}$
한편, $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
$|\alpha-\beta|^2=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)$
$=\frac{16}{9}+\frac{8}{3}$
$=\frac{40}{9}$
따라서, $|\alpha-\beta|=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

16. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2k,\ \alpha\beta = 2k + 3$

$|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로

$20 = (2k)^2 - 4(2k + 3),\ 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

17. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서
$(x+1)^2+(y-2)^2=0$
$x,\ y$ 는 실수이므로 $x=-1,\ y=2$
$\therefore\ x+y=-1+2=1$

18. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + ax + 1 > 0$이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 값의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

모든 x에 대해 $x^2 + ax + 1 > 0$이려면

위의 그림과 같이 되어야 하므로
판별식이 음수이어야 한다.
$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$에서 $a^2 < 4$
$\therefore -2 < a < 2$
$\therefore\ a = -1, 0, 1$ (3개)

19. x의 이차방정식 $mx^2 + 2(1-2m)x + m = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0 < m < \frac{1}{3}$
② $m < \frac{1}{3},\ m > 1$
③ $m < 0,\ 0 < m < \frac{1}{3},\ m > 1$
④ $m < 0\ ,\ m > 1$
⑤ $\frac{1}{3} < m < 1$

해설

이차방정식이므로 $m \neq 0 \quad \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4} = (1-2m)^2 - m^2 > 0$에서

$(m-1)(3m-1) > 0,\ m < \frac{1}{3},\ m > 1 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m < 0,\ 0 < m < \frac{1}{3},\ m > 1$

20. 평지의 공원에 둘레의 길이는 $200\,\mathrm{m}$로 일정하고 넓이는 $900\,\mathrm{m}^2$ 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로의 최대 길이는?

① $40\,\mathrm{m}$　② $50\,\mathrm{m}$　③ $90\,\mathrm{m}$　④ $100\,\mathrm{m}$　⑤ $150\,\mathrm{m}$

해설

화단의 가로 길이를 $x\,\mathrm{m}$라고 하면
세로의 길이는 $(100-x)\,\mathrm{m}$이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
$x>0,\ 100-x>0$에서 $0<x<100\cdots$㈎
$900\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(100-x)\geq 900$
$x^2-100x+900\leq 0,\ (x-10)(x-90)\leq 0$
$\therefore 10\leq x\leq 90$
이것은 ㈎를 만족하므로
가로의 최대 길이는 $90\,\mathrm{m}$이다.

21. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$　　② $m \le -4$　　③ $m \le -2$

④ $m \le 0$　　⑤ $m \le 2$

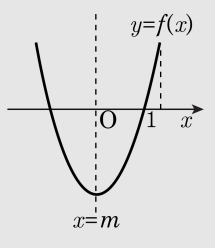
해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\frac{D}{4}=m^2-m-6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3$ ····· ㉠

(ii) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7$ ····· ㉡

(iii) 축 : $m<1$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$

22. $x^2 + ax + (a^2 + 2a - 3) = 0$의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a의 범위를 구하면?

① $0 < a < 1$　　② $\frac{1}{2} < a < 2$　　③ $1 \le a < 2$
④ $2 < a \le 3$　　⑤ $-\frac{1}{2} < a < 2$

해설

두 근을 α, β라 하면
|음근| > 양근이므로
$\alpha + \beta = -a < 0$, $\alpha\beta = a^2 + 2a - 3 < 0$
$\therefore\ 0 < a < 1$

23. 사차방정식 $x^4-3x^3+2x^2+ax+b=0$은 i를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b는 실수)

① $-i$　　② i　　③ $-2i$
④ $3i$　　⑤ $1+2i$

해설

$x=i$를 방정식에 대입하면 $i^4-3i^3+2i^2+ai+b=0$
$(a+3)i+b-1=0$에서 a, b는 실수이므로 $a=-3, b=1$
따라서, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$
한편, $x=i$에서 $x^2+1=0$
$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2+kx+1)$
우변을 전개해서 계수비교하면 $k=-3$
$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2-3x+1)=0$
따라서 나머지 세 근은 $-i$와 $x^2-3x+1=0$의 두 근이고
$x^2-3x+1=0$의 두 근의 곱은 1이다.
$\therefore$나머지 세 근의 곱은 $-i\times 1=-i$

해설

4차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,
네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$
$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$의 네 근의 곱은 1
즉 $i\times$(나머지 세 근의 곱)$=1$
$\therefore$나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i}=-i$

24. x, y가 정수일 때 방정식 $xy-x-2y-2=0$을 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$xy-x-2y-2+4=4$

$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)=4$

따라서

$x-2=1,\ y-1=4$일 때, $x=3,\ y=5$

$x-2=2,\ y-1=2$일 때, $x=4,\ y=3$

$x-2=4,\ y-1=1$일 때, $x=6,\ y=2$

$x-2=-1,\ y-1=-4$일 때, $x=1,\ y=-3$

$x-2=4,\ y-1=-1$일 때, $x=6,\ y=0$

$x-2=1,\ y-1=4$일 때, $x=3,\ y=5$

따라서 순서쌍은 $(3,\ 5)$, $(4,\ 3)$, $(6,\ 2)$, $(1,\ -3)$, $(6,\ 0)$, $(3,\ 5)$로 모두 6개이다.

25. x보다 크지 않은 최대의 정수와 x보다 작지 않은 최소의 정수의 합이 5일 때, x는?

① $\left\{\frac{5}{2}\right\}$　② $\{x|2 \le x \le 3\}$　③ $\{x|2 \le x < 3\}$
④ $\{x|2 < x \le 3\}$　⑤ $\{x|2 < x < 3\}$

해설

$[x]$를 x보다 크지 않는 최대의 정수,
$< x >$를 x보다 작지 않은 최대의 정수라 하자.
$x = n$ (n 은 정수) 일 때,
$[x] = n,\ < x >= n$이므로 $n + n = 5,\ \ n = \frac{5}{2}$
$\therefore$ 적당하지 않다.
$n < x < n + 1$ (n 은 정수) 일 때,
$[x] = n,\ < x >= n + 1$이므로 $n + n + 1 = 5$
$\therefore n = 2$
$\therefore 2 < x < 3$