1. 이차방정식 $x^2 - 10x + k = 0$의 두 근의 비가 $2 : 3$이 되도록 상수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α라 하면
다른 한 근은 3α가 되므로

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\alpha = 10 & \cdots\cdots ① \\ 2\alpha \times 3\alpha = k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 풀면
$\alpha = 2,\ k = 6 \times 2^2 = 24$

2. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2 + x - 6 > 0$을 풀면?

① $x < -3$ 또는 $x > 2$

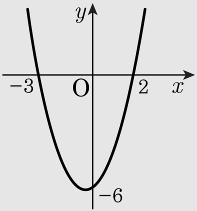
② $x < -2$ 또는 $x > 3$

③ $x < -1$ 또는 $x > 4$

④ $x < 0$ 또는 $x > 5$

⑤ $x < 1$ 또는 $x > 6$

해설



이차방정식 $x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

이차부등식 $f(x) > 0$의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 2$

3. $z = 1 - i$ 일 때, $\dfrac{\bar{z} - 1}{z} - \dfrac{z - 1}{\bar{z}}$ 의 값은?

① $-i$　② i　③ $-2i$　④ $2i$　⑤ 1

해설

$z = 1 - i, \bar{z} = 1 + i$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{i}{1 - i} - \frac{-i}{1 + i} = \frac{2i}{2} = i$$

4. 함수 $y = -x^2 + kx$의 그래프가 직선 $y = -x + 4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{5}{2}$　　⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면

$4 - x = -x^2 + kx \quad \Rightarrow \quad x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$

이어야 한다.

$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad k + 1 = \pm 4$

$\therefore k = 3 \ (\because k > 0)$

5. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$

$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,

$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.

$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

6. 사차방정식 $x^4+5x^3-20x-16=0$의 네 근의 제곱의 합을 구하면?

① 25 ② 20 ③ 10 ④ 7 ⑤ 4

해설

$x^4+5x^3-20x-16$
$=(x+1)(x^3+4x^2-4x-16)$
$=(x+1)(x+4)(x^2-4)$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x-2)$
따라서 네근은 $-1,\ -2,\ -4,\ 2$
$\therefore$ 네근의 제곱의 합은 $1+4+16+4=25$

7. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore \ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore \ xy=2$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를

$x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots \quad$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots \quad$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

9. 두 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}} = a + bi$ 일 때, $\dfrac{1}{2}ab$ 의 값은?
(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-\sqrt{3}$　② $2\sqrt{3}$　③ $-3\sqrt{3}$
④ $4\sqrt{3}$　⑤ $-4\sqrt{3}$

해설

$$\sqrt{-32} - \sqrt{-8}\sqrt{-3} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{-3}}$$
$$= 4\sqrt{2}i + \sqrt{24} - \sqrt{8}i$$
$$= 4\sqrt{2}i + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}i$$
$$= 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}i$$
$$a = 2\sqrt{6}, b = 2\sqrt{2}$$
$$\therefore \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$$

10. $f(x) = x^{61} + x^{47} + 1$이라고 할 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = f(-i) = (-i)^{61} + (-i)^{47} + 1 = 1$$

$$f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = f(i) = i^{61} + i^{47} + 1 = 1$$

11. 두 복소수 $\alpha = a - 2i$, $\beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$를 만족하는 실수 a, b의 합을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a + b = -6$

해설

$\alpha + \overline{\beta} = \overline{3 - 2i}$

$(a - 2i) + (5 - bi) = 3 + 2i$

$(a + 5) - (2 + b)i = 3 + 2i$

$\therefore \; a = -2, b = -4$

$\therefore \; a + b = -6$

12. $a<0,\ b<0$ 일 때, 다음 등식 중에서 성립하지 <u>않는</u> 것은?

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$
② $\sqrt{a^3b}=-a\sqrt{ab}$
③ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
④ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$
⑤ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

해설

$a=-\alpha,\ b=-\beta(\alpha>0,\ \beta>0)$ 로 놓으면

① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{\alpha^2(-\beta)}=\alpha\sqrt{-\beta}=-a\sqrt{b}$

② $$\begin{aligned}\sqrt{a^3b}&=\sqrt{(\alpha)^3(-\beta)}\\&=\alpha\sqrt{(-\alpha)(-\beta)}\\&=-a\sqrt{ab}\end{aligned}$$

③ $$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}&=\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\beta}\\&=\sqrt{\alpha}i\cdot\sqrt{\beta}i\\&=\sqrt{\alpha\beta}i^2\\&=-\sqrt{\alpha\beta}\\&=-\sqrt{ab}\end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}&=\frac{\sqrt{-\beta}}{\sqrt{-\alpha}}\\&=\frac{\sqrt{\beta}i}{\sqrt{\alpha}i}\\&=\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\\&=\sqrt{\frac{b}{a}}\end{aligned}$$

⑤ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(-\alpha)^2(-\beta)^2}=\alpha\beta=ab$

13. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

14. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서

$$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$$

15. 이차방정식 $3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$
④ $\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

해설

$3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면
근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-\frac{4}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{2}{3}$

한편, $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$$|\alpha-\beta|^2=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{16}{9}+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{40}{9}$$

따라서, $|\alpha-\beta|=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

16. 포물선 $y=x^2-2kx+2k+3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y=x^2-2kx+2k+3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2-2kx+2k+3=0$ 의 두 근이므로 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=2k+3$

$|\alpha-\beta|=2\sqrt{5}$에서 $|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$20=(2k)^2-4(2k+3),\ 4k^2-8k-12=20$

$k^2-2k-8=0$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

17. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 x, y의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

x, y 는 실수이므로 $x=-1$, $y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

18. 모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+1>0$이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 값의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 x에 대해 $x^2+ax+1>0$이려면

위의 그림과 같이 되어야 하므로
판별식이 음수이어야 한다.

$D=a^2-4\cdot1\cdot1<0$에서 $a^2<4$

$\therefore -2<a<2$

$\therefore\ a=-1, 0, 1$ (3개)

19. x의 이차방정식 $mx^2+2(1-2m)x+m=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0<m<\frac{1}{3}$
② $m<\frac{1}{3},\ \ m>1$
③ $m<0,\ \ 0<m<\frac{1}{3},\ \ m>1$
④ $m<0\ ,\ m>1$
⑤ $\frac{1}{3}<m<1$

해설

이차방정식이므로 $m \neq 0 \quad \cdots ㉠$

$\frac{D}{4}=(1-2m)^2-m^2>0$에서

$(m-1)(3m-1)>0,\ \ m<\frac{1}{3},\ \ m>1 \quad \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $m<0,\ \ 0<m<\frac{1}{3},\ \ m>1$

20. 평지의 공원에 둘레의 길이는 $200\,\mathrm{m}$로 일정하고 넓이는 $900\,\mathrm{m}^2$ 이상인 직사각형 모양의 화단을 만들려고 한다. 이 때, 만들어지는 화단의 가로의 최대 길이는?

① $40\,\mathrm{m}$ ② $50\,\mathrm{m}$ ③ $90\,\mathrm{m}$

④ $100\,\mathrm{m}$ ⑤ $150\,\mathrm{m}$

해설

화단의 가로 길이를 $x\,\mathrm{m}$라고 하면
세로의 길이는 $(100-x)\,\mathrm{m}$이다.
가로, 세로의 길이는 모두 양수이므로
$x>0,\ 100-x>0$에서 $0<x<100\cdots$(가)
$900\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(100-x)\ge 900$
$x^2-100x+900\le 0, (x-10)(x-90)\le 0$
$\therefore 10\le x\le 90$
이것은 (가)를 만족하므로
가로의 최대 길이는 $90\,\mathrm{m}$이다.

21. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$ ② $m \le -4$ ③ $m \le -2$

④ $m \le 0$ ⑤ $m \le 2$

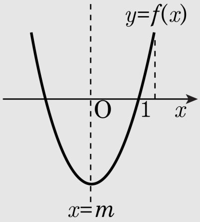
해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\frac{D}{4}=m^2-m-6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3 \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7 \quad \cdots\cdots$ ㉡

(iii) 축 : $m<1 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$

22. $x^2+ax+(a^2+2a-3)=0$의 두 근이 서로 다른 부호를 갖고 양근이 음근의 절댓값보다 작을 때, 상수 a의 범위를 구하면?

① $0<a<1$ ② $\frac{1}{2}<a<2$ ③ $1\leq a<2$

④ $2<a\leq 3$ ⑤ $-\frac{1}{2}<a<2$

해설

두 근을 α, β라 하면

$|$음근$|$ > 양근이므로

$\alpha+\beta=-a<0,\ \alpha\beta=a^2+2a-3<0$

$\therefore\ 0<a<1$

23. 사차방정식 $x^4-3x^3+2x^2+ax+b=0$은 i를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b는 실수)

① $-i$　　② i　　③ $-2i$

④ $3i$　　⑤ $1+2i$

해설

$x=i$를 방정식에 대입하면 $i^4-3i^3+2i^2+ai+b=0$

$(a+3)i+b-1=0$에서 a, b는 실수이므로 $a=-3, b=1$

따라서, 주어진 방정식은 $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$

한편, $x=i$에서 $x^2+1=0$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2+kx+1)$

우변을 전개해서 계수비교하면 $k=-3$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=(x^2+1)(x^2-3x+1)=0$

따라서 나머지 세 근은 $-i$와 $x^2-3x+1=0$의 두 근이고

$x^2-3x+1=0$의 두 근의 곱은 1이다.

$\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i\times 1=-i$

해설

4차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$에서 네 근의 합은 $-\dfrac{b}{a}$,

네 근의 곱은 $\dfrac{e}{a}$

$x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$의 네 근의 곱은 1

즉 $i\times$(나머지 세 근의 곱)$=1$

$\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\dfrac{1}{i}=-i$

24. x, y가 정수일 때 방정식 $xy-x-2y-2=0$을 만족하는 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 6 개

해설

$xy-x-2y-2+4=4$

$x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)=4$

따라서

$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$

$x-2=2$, $y-1=2$일 때, $x=4$, $y=3$

$x-2=4$, $y-1=1$일 때, $x=6$, $y=2$

$x-2=-1$, $y-1=-4$일 때, $x=1$, $y=-3$

$x-2=4$, $y-1=-1$일 때, $x=6$, $y=0$

$x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3$, $y=5$

따라서 순서쌍은 $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(6, 2)$, $(1, -3)$, $(6, 0)$, $(3, 5)$로 모두 6개이다.

25. x보다 크지 않은 최대의 정수와 x보다 작지 않은 최소의 정수의 합이 5일 때, x는?

① $\left\{\frac{5}{2}\right\}$ ② $\{x|2 \le x \le 3\}$ ③ $\{x|2 \le x < 3\}$

④ $\{x|2 < x \le 3\}$ ⑤ $\{x|2 < x < 3\}$

해설

$[x]$를 x보다 크지 않는 최대의 정수,

$< x >$를 x보다 작지 않은 최대의 정수라 하자.

$x = n$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n$이므로 $n + n = 5,\ n = \frac{5}{2}$

$\therefore$ 적당하지 않다.

$n < x < n + 1$ (n 은 정수) 일 때,

$[x] = n,\ < x >= n + 1$이므로 $n + n + 1 = 5$

$\therefore n = 2$

$\therefore 2 < x < 3$