1. 실수 x, y에 대하여 $x+y+(xy-1)i=2+i$일 때 x^2+y^2의 값은?

① 4 ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ -1

해설

$x+y=2,\ xy-1=1 \quad \therefore xy=2$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=0$

2. 이차부등식 $x^2-2x-8<0$의 해가 $a<x<b$일 때, $b-a$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$x^2-2x-8<0$ 에서 $(x-4)(x+2)<0$

$\therefore -2<x<4$

$b-a=6$

3. $(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0　② 1　③ -3　④ 1, 3　⑤ -1

해설

$(1+i)x^2+2(1+2i)x-3+3i$
$=x^2+x^2i+2x+4xi-3+3i$
$=(x^2+2x-3)+(x^2+4x+3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$=0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2+2x-3=0$이면서, $x^2+4x+3\neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x=1$

4. x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a+3)x+a^2+7=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a \geq 0$　　② $-1 < a < 0$　　③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\frac{1}{3}$　　⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2+7) \geq 0$

$a^2 + 6a + 9 - a^2 - 7 \geq 0$

$6a + 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$

5. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하면?

① 4　② -4　③ 8　④ -8　⑤ -16

해설

$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0$이므로
두 허근 α, β는
각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로
$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$

6. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x+2y=8 \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=9 \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=5 \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=2$

▷ 정답 : $y=3$

▷ 정답 : $z=1$

해설

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $x+2y+3z=11$ $\cdots\cdots$ ㉣
㉣ − ㉠에서 $3z=3$ $\therefore z=1$
㉣ − ㉡에서 $x=2$
㉣ − ㉢ 에서 $y=3$

7. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1$, $\dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

8. 다음 연립부등식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 4x < 5 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 < x < 2$

해설

부등식 $x^2 - 4 < 0$에서 $(x + 2)(x - 2) < 0$
$\therefore -2 < x < 2 \cdots\cdots$ ㉠
$x^2 - 4x < 5$에서 $x^2 - 4x - 5 < 0$
$(x + 1)(x - 5) < 0$
$\therefore -1 < x < 5 \cdots\cdots$ ㉡
따라서 구하는 해는 ㉠과 ㉡를
동시에 만족하는 x의 값이므로
$\therefore -1 < x < 2$

9. 방정식$|x-3|+|x-4|=2$의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x<3$일 때,

$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$

$\therefore\ x=\frac{5}{2}$

ii) $3\le x<4$일 때

$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$

$\therefore$ 해가 없다.

iii) $x\ge 4$일 때

$x-3+x-4=2,\ 2x=9$

$\therefore\ x=\frac{9}{2}$

따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$이고 그 합은 7

10. 이차방정식 $x^2 + 5(a-1)x - 24a = 0$의 두 근의 비가 2 : 3일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근을 $\alpha = 2k$, $\beta = 3k$라고 하면
$\alpha + \beta = 2k + 3k = -5(a-1)$
$\alpha\beta = 2k \times 3k = -24a$
$\therefore k = 1 - a$, $k^2 = -4a$
$a = 1 - k$를 대입하면
$k^2 + 4(1-k) = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2 = 0$
$\therefore k = 2$
$\therefore a = -1$

해설

11. 이차방정식 $x^2-3x+4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고, 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-x+1=0$　　② $x^2+x+1=0$

③ $x^2+x+2=0$　　④ $x^2-x+2=0$

⑤ $x^2-2x+3=0$

해설

$x^2-3x+4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$
한편, $(\alpha-1)+(\beta-1)=(\alpha+\beta)-2=3-2=1$
$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=4-3+1=2$
따라서, 두 근의 합과 곱이 각각 1, 2인 이차방정식은 $x^2-1\cdot x+2=0$
$\therefore\ x^2-x+2=0$

12. A, B 두 사람이 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$을 푸는데 A는 b를 잘못 읽어 -4와 7을, B는 c를 잘못 읽어 $-3 \pm \sqrt{2}i$를 근으로 얻었다. 원래의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

A는 a와 c를 바르게 읽었으므로
근과 계수와의 관계에서
$\frac{c}{a} = -4 \cdot 7 = -28,\ c = -28a$
B는 a와 b는 바르게 읽었으므로
$-\frac{b}{a} = (-3 + \sqrt{2}i) + (-3 - \sqrt{2}i) = -6,\ b = 6a$
따라서 원래의 이차방정식은
$ax^2 + 6ax - 28a = 0$
근과 계수와의 관계에 의해 두 근의 합은 -6

13. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 한 근이 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}} = 2-\sqrt{3}$ 이므로,
두 근은 $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$
$p = -$(두근의 합) $= -4$
$q =$ (두근의 곱) $= 1$
$\therefore p + q = -3$

14. 이차함수 $y = ax^2 + 2x + 4 + 2a$ ($a \neq 0$) 의 최댓값이 3 일 때, a 의 값은?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

이차함수에서 최댓값을 가지려면 이차항의 계수 a 의 부호는 음수이다.
주어진 식을 변형 하면

$$y = a\left\{x^2 + \frac{2}{a}x + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 4 + 2a$$

$$= a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + 4 + 2a - \frac{1}{a}$$

따라서 $x = -\frac{1}{a}$ 일 때,

최댓값 $4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 을 가진다.

$4 + 2a - \frac{1}{a} = 3$ 에서 $2a - \frac{1}{a} + 1 = 0$

$2a^2 + a - 1 = 0$, $(a + 1)(2a - 1) = 0$

$\therefore a = -1$ 또는 $a = \frac{1}{2}$

$a = -1(\because\ a < 0)$

15. $x^2+y^2=5$를 만족시키는 실수 x,y에 대하여 $2x-y$는 $x=\alpha, y=\beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m+\alpha+\beta$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$2x-y=k$로 놓으면
$y=2x-k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2+y^2=5$에 대입하면
$x^2+(2x-k)^2=5$
$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4}=4k^2-5(k^2-5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x,y의 값은
㉡에서 $5x^2-20x+20=0$, $5(x-2)^2=0 \therefore x=2$
㉠에서 $y=4-5=-1$
따라서, $m=5, \alpha=2, \beta=-1$이므로
$m+\alpha+\beta=6$

16. 방정식 $(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$(x^2+x+2)^2=x^2+x+4$에서
$x^2+x+2=A$라 하면
$A^2=A+2$,
$A^2-A-2=0$, $(A+1)(A-2)=0$
$\therefore$ $A=-1$ 또는 $A=2$
(i) $x^2+x+2=-1$일 때, $x^2+x+3=0$
(ii) $x^2+x+2=2$일 때, $x^2+x=0$
(i), (ii)에서 α, β는 허근이므로 $x^2+x+3=0$의 근이 된다.
따라서, $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=3$이므로
$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\times3=-5$

17. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$일 때, 유리수 m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$를 주어진 방정식에 대입하면

$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$

이 식을 정리하면

$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$

무리수가 서로 같은 조건에 의하여

$260 - 26m = 0$, $160 - 16m = 0$

따라서, $m = 10$

계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라고 하면 근과 계수와의 관계에서

$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m$ ······ ㉠

$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4$ ······ ㉡

㉠에서 $\alpha = m - 8$ ······ ㉢

㉡에서 $8\alpha = 2m - 4$ ······ ㉣

㉢을 ㉣에 대입하면 $8(m - 8) = 2m - 4$

$\therefore\ m = 10$

18. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라고 할 때, $(\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8$의 값은?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ ω　　⑤ $-\omega$

해설

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \ \omega^2 + \omega + 1 = 0, \ \omega^3 = 1$

$\Rightarrow \ (\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$

$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$

$= \omega^2 + \omega = -1$

19. 두 방정식 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 없다.　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases}(x+y-1)(x-y-1)=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $y=\pm(x-1)$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-(x-1)^2=0$, $2x-1=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$, ㉢에서 $y=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$

$\therefore\ (x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 2개

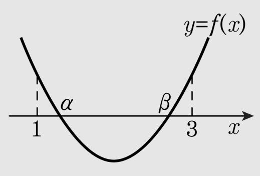
20. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

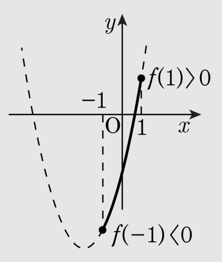
따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

21. 이차방정식 $x^2 + 4mx - 3m = 0$의 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작도록 하는 실수 m의 범위를 구하면?

① $m > \frac{2}{9}$　② $m > \frac{1}{7}$　③ $m > -\frac{1}{3}$
④ $m < -\frac{1}{3}$　⑤ $m < \frac{2}{9}$

해설

$f(x) = x^2 + 4mx - 3m$으로 놓을 때,
$f(x) = 0$의 근이 한 근은 -1과 1사이에 있고, 또 한 근은 -1보다 작아야 하므로



$f(-1) = 1 - 4m - 3m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{7}$

$f(1) = 1 + 4m - 3m > 0 \Rightarrow m > -1$

$\therefore\ m > \frac{1}{7}$

22. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$ 의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$x>0$ 이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

23. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5　② 4　③ 3　④ 2　⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$|\alpha+2-\alpha| = \dfrac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1} = |2|$

$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8} = 2$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$4 = p^2+8p+16-4q+8,\ 4q = p^2+8p+20$

$q = \dfrac{1}{4}p^2+2p+5 = \dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta = p+4, \alpha\beta = q-2$

두 근의 차가 2이므로

$|\alpha-\beta| = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = 2$

$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)} = 2$

양변을 제곱하면

$(p+4)^2-4(q-2) = 4$

q에 대해 정리하면

$q = \dfrac{1}{4}(p+4)^2+1$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

24. 1200 명이 들어갈 수 있는 어느 소극장에서 입장권을 6000 원에 팔면 평균 600 명의 관중이 입장한다. 시장조사에 의하면, 입장료를 500 원씩 내리면 100 명씩 더 온다고 조사가 되었다. 이 때, 수입을 최대로 하기 위한 입장권의 가격은?

① 3000 원　　② 3500 원　　③ 4000 원
④ 4500 원　　⑤ 5000 원

해설

수입을 $f(x)$ 라고 하면,

$f(x) = (6000 - 500x)(600 + 100x)$
$= -50000x^2 + 300000x + 3600000$
$= -50000(x - 3)^2 + 4050000$

$x = 3$ 일 때 최대이다.
즉, (입장권 가격)$= 6000 - 500 \times 3 = 4500$ 원.

25. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$을 만족하는 x의 범위가 $-2<x<1$일 때, 부등식 $cx^2-ax+b<0$을 만족하는 x의 범위는?

① $-2<x<1$ ② $-1<x<\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}<x<2$
④ $\frac{1}{2}<x<1$ ⑤ $\frac{1}{2}<x<2$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$이므로

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0(a<0)$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=x^2+x-2<0$

$\therefore\ \frac{b}{a}=1, \frac{c}{a}=-2$

$cx^2-ax+b<0$에서

양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-x+\frac{b}{a}>0 \Leftrightarrow -2x^2-x+1>0$

$2x^2+x-1<0, (2x-1)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<\frac{1}{2}$