

1. 다음 이차방정식 중에서 한 근이 $x = -1 + \sqrt{3}$ 인 것은?

- ① $(x+1)^2 = -3$ ② $(x+1)^2 = 3$ ③ $(x+3)^2 = -1$
④ $(x+3)^2 = 1$ ⑤ $(x-1)^2 = 1$

해설

$(x+a)^2 = b$ 에서 $x+a = \pm\sqrt{b}$
 $\therefore x = -a \pm \sqrt{b}$ 임을 이용해 각 방정식을 풀면
① $x = -1 \pm \sqrt{-3} = -1 \pm \sqrt{3}i$
② $x = -1 \pm \sqrt{3}$
③ $x = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$
④ $x = -3 \pm \sqrt{1}$
 $\therefore x = -4$ 또는 $x = -2$
⑤ $x = 1 \pm \sqrt{1}$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 \geq 0 \\ (x+1)^2 < 4 \end{cases}$ 을 풀면?

- ① $-2 < x \leq -1, \frac{2}{3} < x < 1$ ② $-1 < x \leq -3, \frac{2}{3} \leq x < 2$
③ $-2 < x \leq 0, \frac{1}{3} < x < 1$ ④ $-3 < x \leq -2, \frac{2}{3} \leq x < 1$
⑤ $-4 < x \leq -2, \frac{1}{3} < x < 1$

해설

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 \geq 0 \cdots (가) \\ (x+1)^2 < 4 \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서 $(x+2)(3x-2) \geq 0$ 이므로

$$x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq \frac{2}{3}$$

(나)에서 $-2 < x+1 < 2,$

$-3 < x < 1$ 이므로

$$-3 < x \leq -2, \frac{2}{3} \leq x < 1$$

3. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}} \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉡}} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2} \cdot \sqrt{-2}} \\ &= \boxed{\text{㉢}} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\ &= \boxed{\text{㉣}} \frac{4i}{2} \\ &= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}\end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$
따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

4. 이차방정식 $x^2 + (k - 4)x + k - 1 = 0$ 이 중근을 가지도록 상수 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

판별식을 D 라 하면,
 $D = 0$ 일 때 중근을 가지므로
 $D = (k - 4)^2 - 4(k - 1) = k^2 - 12k + 20 = 0$ 에서
 $(k - 2)(k - 10) = 0$
따라서, $k = 2, k = 10$ 이므로 k 의 값은 12이다.

5. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a-m-1)x + a^2 - b + m^2 = 0$ 의 근이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4} = (a - m - 1)^2 - (a^2 - b + m^2) = 0$$

m 의 값에 관계없이

$$2(-a + 1)m + (-2a + b + 1) = 0$$

이어야 하므로

$$2(-a + 1) = 0, -2a + b + 1 = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 1$$

$$\therefore a + b = 2$$

6. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

① -3

② -1

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -3, -1, 1 \text{ 또는 } 2$$

7. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x + y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 에서

$(x - y)(x - 2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$$

$$x = \pm 2, y = \pm 2$$

ii) $x = 2y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$$

$$y = \pm \sqrt{2}, x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$$

8. 이차부등식 $ax^2 + 4x + a < 0$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$

② $a < 0$

③ $a < 2$

④ $a < 4$

⑤ $a < 8$

해설

$ax^2 + 4x + a < 0$ 이 임의의 실수 x 에 대하여 성립하려면

i) $a < 0$

ii) $ax^2 + 4x + a = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a^2 < 0$$

$$a^2 - 4 > 0, (a + 2)(a - 2) > 0$$

$\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$

i), ii)의 공통 범위를 구하면 $a < -2$

9. $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1998}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

- ① 0 ② i ③ $-2i$ ④ -1 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{1+i} &= \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \\ \frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i \text{ 이므로} \\ f\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + f\left(\frac{1+i}{1-i}\right) &= f(-i) + f(i) \\ &= (-i)^{1998} + (i)^{1998} \\ &= (-i)^{1996} \cdot (-i)^2 + i^{1996} \cdot i^2 = -2\end{aligned}$$

10. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- I n 이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$ 은 실수이다.
- II $-1 < a < 1$ 일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$
- III $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ 이다.
- IV $0 < a < b$ 일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

- ① I, II
- ② I, III
- ③ II, III
- ④ I, IV
- ⑤ II, III, IV

해설

I. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

II. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$
 $= a+1 - (2-a)$
 $= 2a-1 \neq 3$

III. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 이면 $b < 0, a \geq 0$ 이다.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)i}$
 $= \sqrt{a(-b)i} = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$

$\therefore \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

IV. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

11. $\bar{z} = -z$ 를 만족하는 z 에 대하여 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 이라 할 때, $w\bar{w}$ 의 값을 구하여라. (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켈레복소수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$z = a + bi$ (a, b 는 실수) 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$

$\bar{z} = -z$ 이므로 $a - bi = -(a + bi)$

$a - bi = -a - bi$, $2a = 0$

따라서 $a = 0$ 이므로 $z = bi$

$z = bi$ 를 $w = \frac{z-1}{z+1}$ 에 대입하면

$$w = \frac{-1+bi}{1+bi}, \bar{w} = \overline{\left(\frac{-1+bi}{1+bi}\right)} = \frac{-1-bi}{1-bi}$$

$$\begin{aligned}\therefore \bar{w} &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-1-bi}{1-bi} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{-(1+bi)}{-(-1+bi)} \\ &= \frac{-1+bi}{1+bi} \cdot \frac{1+bi}{-1+bi} = 1\end{aligned}$$

12. 이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 을 두 근으로 하고, x^2 의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하시오.

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x - 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 근과계수와 관계로부터

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -1$$

2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2 - (2 - 1)x + 2 \cdot (-1) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + ax + b = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 일 때, 상수 k 의 값은?

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α, β ($\alpha < \beta$)라고 하면 α, β 는 이차방정식 $x^2 + 2x + k = 0$ 의 두 실근이다.

이 때, 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -2$, $\alpha\beta = k$ 이고

x 축 위의 두 교점 사이의 거리가 $4\sqrt{2}$ 이므로 $\beta - \alpha = 4\sqrt{2}$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{에서 } (4\sqrt{2})^2 = (-2)^2 - 4k, 32 = 4 - 4k$$

$$\therefore k = -7$$

14. 곡선 $y = -x^2 + kx$ 과 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두점에서 만나도록 하는 k 의 값이 아닌 것은?

① -6

② -3

③ 3

④ 6

⑤ 9

해설

곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면
 $-x^2 + kx = x + 1$ 의 판별식이 0 보다 커야 한다.
 $\Rightarrow x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$
 $D = (1 - k)^2 - 4 > 0, (k + 1)(k - 3) > 0$
 $k < -1$ 또는 $k > 3$
 $\therefore 3$ 은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

15. $-1 \leq x \leq 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$x = 1$ 일 때, 최대이고

최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$

$$\therefore k = 2$$

따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로

$x = 1$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$

이므로 최소는 $x = -1$ 일 때, 최솟값

-1 을 갖는다.

16. 다음 사차방정식을 풀 때 근이 아닌 것을 구하면?

$$(x^2 - 2x)^2 - 6(x^2 - 2x) - 16 = 0$$

- ① 4 ② -4 ③ -2 ④ $1 + i$ ⑤ $1 - i$

해설

$x^2 - 2x = X$ 로 놓으면 주어진 방정식은
 $X^2 - 6X - 16 = 0, (X - 8)(X + 2) = 0$
 $\therefore x = 8$ 또는 $X = -2$
(i) $X = 8$ 일 때 $x^2 - 2x = 8$ 에서 $(x - 4)(x + 2) = 0$
 $\therefore x = 4$ 또는 $x = -2$
(ii) $X = -2$ 일 때 $x^2 - 2x = -2$ 에서 $x^2 - 2x + 2 = 0$
 $\therefore x = 1 \pm i$
따라서 (i), (ii) 에서 $x = 4$ 또는 $x = -2$ 또는 $x = 1 \pm i$

17. 4차방정식 $x^4 + 2x^2 + 4x + 8 = 0$ 을 $(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2 = 0$ 꼴로 변형한 후 네 근을 얻었다. 다음 중 네 근에 포함되는 것은?

① $1 \pm \sqrt{3}i$

② $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

③ $-1 \pm \sqrt{3}i$

④ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

⑤ $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

해설

$$(x^2 + a)^2 - (2x + b)^2$$

$$= x^4 + (2a - 4)x^2 - 4bx + a^2 - b^2$$

이 식은 주어진 4차방정식과 같은 식이므로

$$2 = 2a - 4, 4 = -4b, 8 = a^2 - b^2$$

$$\therefore a = 3, b = -1$$

따라서 주어진 4차방정식은

다음과 같이 변형하면,

$$(x^2 + 3)^2 - (2x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{3}i \text{ 또는 } x = -1 \pm i$$

18. 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 한 근이 $2-i$ 일 때, 실수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ 의 세 근: $2-i, 2+i, \alpha$

세 근의 합: $-a = 4 + \alpha \cdots \textcircled{1}$

세 근의 곱: $-5 = (2+i)(2-i)\alpha = 5\alpha$

$\therefore \alpha = -1$, $\textcircled{1}$ 식에 대입하면 $a = -3$

$b = (2+i)(2-i) + (2+i) \cdot (-1) + (2-i) \cdot (-1) = 5 - 4 = 1$

$\therefore a^2 + b^2 = 10$

19. $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 의 해가 $x < -\frac{1}{3}$ 일 때, 부등식 $(a-3b)x + (b-2a) > 0$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < -3$

해설

$$\begin{aligned}(a+b)x + (2a-3b) &< 0 \\(a+b)x &< 3b-2a \\ \Rightarrow x &< \frac{3b-2a}{a+b} = -\frac{1}{3} \quad (a+b > 0) \\ \Rightarrow a+b &= -3(3b-2a) \\ \Rightarrow a=2b, \quad a+b=3b > 0 &\rightarrow b > 0 \\ (a-3b)x + (b-2a) > 0 &\Leftrightarrow -bx-3b > 0 \\ bx &< -3b \\ \therefore x &< -3 \quad (\because b > 0)\end{aligned}$$

20. x 에 대한 이차부등식 $x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 이라면
 $(x - 1)(x - 4) > 0$ 에서 $x^2 - 5x + 4 > 0$ 이므로
 $a = -5, b = 4$ 따라서 $a + b = -1$

21. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 6일 때, 이차방정식 $f(4x-1) = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 6

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $f(x) = k(x - \alpha)(x - \beta)$
 $f(4x - 1)$ 는 $f(x)$ 의 x 대신 $4x - 1$ 를 대입한 것과 같으므로
 $f(4x - 1) = k(4x - 1 - \alpha)(4x - 1 - \beta) = 0$ 의 근은
 $x = \frac{\alpha + 1}{4}, \frac{\beta + 1}{4}$
 $\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{\alpha + 1 + \beta + 1}{4} = \frac{6 + 2}{4} = 2$

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
 $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 0$
 $f(4x - 1) = 0$ 에서
 $4x - 1 = \alpha, 4x - 1 = \beta$
 $\therefore x = \frac{\alpha + 1}{4}, x = \frac{\beta + 1}{4},$
 $\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{\alpha + 1 + \beta + 1}{4} = \frac{6 + 2}{4} = 2$

22. $a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $a^5 + a^3 - 1$ 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

② 0

③ 1

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $-1 + \sqrt{3}i$

해설

$$a = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$2a + 1 = -\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$$4a^2 + 4a + 1 = -3 \Rightarrow a^2 + a + 1 = 0$$

양변에 $a - 1$ 를 곱하면

$$(a - 1)(a^2 + a + 1) = 0 \Leftrightarrow a^3 - 1 = 0$$

$$\therefore a^3 = 1$$

$$(\text{준식}) = a^3 a^2 + a^3 - 1$$

$$= a^2$$

$$= -a - 1 (\because a^2 + a + 1 = 0)$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

23. α 는 허수이고 $\alpha^3 = -1$ 일 때, $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이 되는 자연수 n 의 값으로 적당한 것은?

① 65 ② 66 ③ 67 ④ 68 ⑤ 69

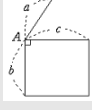
해설

$1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = 0$ 이므로
양변에 각각 $(1 - \alpha)$ 를 곱하면
 $(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n)(1 - \alpha) = 0,$
 $1 - \alpha^{n+1} = 0$
 $\therefore \alpha^{n+1} = 1$
한편, $\alpha^3 = -1$ 이므로
 $\alpha^6 = 1$
 $\therefore n + 1 = 6k (k = 1, 2, 3, \dots)$
 $\therefore k = 11$ 일 때 $n = 65$ 가 될 수 있다.

24. 직육면체의 한 꼭짓점 A에 모인 세면의 넓이의 비가 2 : 3 : 4 일 때, 꼭짓점 A에 모인 세 모서리의 길이의 비를 구하면?

- ① 2 : 3 : 4
- ② 4 : 3 : 7
- ③ 3 : 1 : 4
- ④ 4 : 3 : 6
- ⑤ 4 : 5 : 6

해설



꼭짓점 A의 각면은 넓이비가 2 : 3 : 4 이므로,

$$\begin{cases} ab = 2k^2 \dots ① \\ bc = 3k^2 \dots ② \\ ca = 4k^2 \dots ③ \end{cases}$$

(k는 양의 상수)

$$ab \times bc \times ca = 2k^2 \cdot 3k^2 \cdot 4k^2, (abc)^2 = 24k^6$$

$$\therefore abc = 2\sqrt{6}k^3 \dots ④$$

$$④ \div ② \text{ 하면 } a = \frac{2}{3}\sqrt{6}k$$

$$④ \div ③ \text{ 하면 } b = \frac{\sqrt{6}}{2}k$$

$$④ \div ① \text{ 하면 } c = \sqrt{6}k$$

$$\therefore a : b : c = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} : 1 = 4 : 3 : 6$$

25. $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수라고 할 때, $y = 2[x] + 3$, $y = 3[x - 2] + 5$ 를 동시에 만족시키는 정수가 아닌 x 에 대하여 $x + y$ 의 범위를 구하면?

① $13 < x + y < 14$

② $14 < x + y < 15$

③ $-4 < x + y < 4$

④ $15 < x + y < 16$

⑤ $x + y = 16.4$

해설

$$2[x] + 3 = 3[x - 2] + 5, \quad 2[x] + 3 = 3([x] - 2) + 5$$

$$\therefore [x] = 4$$

x 가 정수가 아니므로 $4 < x < 5$

$$y = 2[x] + 3 = 11 \text{ 이므로 } 15 < x + y < 16$$