1. 다음 연립방정식의 해를 구하면?

$$\begin{cases} 0.6x + 0.5y = 2.8 & \cdots ㉠ \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

① $(2, 3)$　　② $(-2, 3)$　　③ $(3, 2)$

④ $(3, -2)$　　⑤ $(-3, -2)$

해설

㉠, ㉡의 양변에 각각 10, 6을 곱하면

$$\begin{cases} 6x + 5y = 28 & \cdots\cdots ㉢ \\ 2x + 3y = 12 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$$

㉢ − ㉣×3을 하면 $-4y = -8$

$\therefore\ y = 2$를 ㉣ 대입하면 $x = 3$

$\therefore\ x = 3,\ y = 2$

2. $-2 \le x \le 3$일 때, $3x-1$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$-2 \le x \le 3$에서 $-6 \le 3x \le 9$, $-7 \le 3x-1 \le 8$
따라서, 최댓값은 8이고 최솟값은 -7이므로 두 값의 합은 1이다.

3. $z=\dfrac{2}{1-i}$ 일 때, $2z^2-4z-1$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 2 ③ -3 ④ 4 ⑤ -5

해설

$z=\dfrac{2}{1-i}=1+i$

$\therefore\ 2z^2-4z-1 = 2(1+i)^2-4(1+i)-1$
$= 4i-4-4i-1$
$= -5$

해설

$z=1+i, z-1=i$
양변을 제곱하고 정리하면
$z^2-2z=-2$
$2z^2-4z-1$
$=2(z^2-2)z-1$
$=-4-1=-5$

4. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

5. 두 수 $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-2x-5=0$ ② $x^2+2x+5=0$
③ $x^2+5x+2=0$ ④ $x^2-2x+5=0$
⑤ $x^2-5x+2=0$

해설
$\alpha+\beta=(1+2i)+(1-2i)=2$
$\alpha\beta=(1+2i)(1-2i)=5$
$\therefore x^2-2x+5=0$

6. x의 범위가 $1 \le x \le 2$ 일 때, 함수 $y = x^2 - x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ 이므로

꼭짓점의 x 좌표 $\frac{1}{2}$ 이 x의 범위에 포함되지 않는다.

$x = 1$ 일 때, $y = -1$ (최솟값),
$x = 2$ 일 때, $y = 1$ (최댓값)
따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 -1 이다.

7. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8　　② -2　　③ 1　　④ 4　　⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$
$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$
$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$
$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$
$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$
근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

8. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ 를 만족하는 x, y, z를 구할 때, $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\begin{cases} x+y=1 \cdots ㉠ \\ y+z=3 \cdots ㉡ \\ z+x=4 \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ $+$ ㉡ $+$ ㉢ $\Rightarrow 2(x+y+z)=8$

$x+y+z=4 \cdots$ ㉣

㉣ $-$ ㉠ $\Rightarrow z=3$

㉣ $-$ ㉡ $\Rightarrow x=1$

㉣ $-$ ㉢ $\Rightarrow y=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=10$

9. x, y가 양의 실수이고, $x^2 + xyi + y^2 - 5 - 2i = 0$일 때, $x + y$의 값을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

실수부와 허수부로 나눈다.
$(x^2 + y^2 - 5) + (xy - 2)i = 0$
$x^2 + y^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉠
$xy - 2 = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하면
$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 5 + 4 = 9$
$\therefore\ x + y = 3$ ($\because$ x, y 는 양의 실수)

10. 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$ 이므로

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$

$=\frac{1}{i}^{5}+\frac{1}{i}^{6}+\frac{1}{i}^{7}+\frac{1}{i}^{8}\cdots$

$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}+\frac{1}{i}^{3}+\frac{1}{i}^{4}$

$=-i-1+i+1=0$

$\therefore$ (준식) $=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+\frac{1}{i}^{2}$

$=1-i-1=-i$

11. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ n이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.

Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$

Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.

Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ

④ Ⅰ, Ⅳ ⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = |a+1| - |a-2|$

$= a + 1 - (2 - a)$

$= 2a - 1 \neq 3$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0$, $a \geq 0$ 이다.

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-(-b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{(-b)}i$

$= \sqrt{a(-b)}i = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}$

$\therefore$ $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

12. $|x+1|+|x-2|=x+3$을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x<-1$일 때,

$-x-1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (모순)

ii) $-1\le x<2$일 때,

$x+1-x+2=x+3$

$\therefore\ x=0$

iii) $x\ge 2$일 때,

$x+1+x-2=x+3$

$\therefore\ x=4$

13. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a,b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b$,
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

14. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 정수 k의 개수는?

① 4개 ② 5개 ③ 6개 ④ 7개 ⑤ 8개

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9$의 그래프가 x축과 만나지 않으려면

이차방정식 $y = x^2 - 2(k-1)x + 9 = 0$의 판별식을 D라 할 때 $D < 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 9 < 0$

$k^2 - 2k - 8 < 0,\ (k+2)(k-4) < 0$

$\therefore -2 < k < 4$

따라서, k값 중 정수인 것은 $-1, 0, 1, 2, 3$의 5개이다.

15. 이차함수 $y = x^2 + x - 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때, 정수 m 의 최댓값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

이차함수 $y = x^2 + x - 1$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼,
y 축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면
$y - m = (x-1)^2 + (x-1) - 1$
$\therefore\ y = x^2 - x - 1 + m$
이 함수의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식
$x^2 - x - 1 + m = 0$ 에서
$D = 1 - 4(-1 + m) > 0$
$5 - 4m > 0 \quad \therefore\ m < \frac{5}{4}$
따라서 정수 m 의 최댓값은 1 이다.

16. x에 대한 삼차방정식 $x^3-ax^2+5x-b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3-ax^2+5x-b=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1-\sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)+\left(1+\sqrt{2}\right)\beta+\left(1-\sqrt{2}\right)\beta=5$

$-1+2\beta=5,\ 2\beta=6 \quad \therefore\ \beta=3$

따라서, $a=\left(1+\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)+3=5$

$b=\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot 3=-3$이므로

$a+b=5+(-3)=2$

17. 어떤 정육면체의 밑변의 가로의 길이를 1 cm줄이고, 세로의 길이와 높이를 각각 2 cm, 3 cm씩 늘였더니 이 직육면체의 부피가 처음 정육면체의 부피의 $\frac{5}{2}$ 배가 되었다. 처음 정육면체의 한 변의 길이를 구하여라. (단, 정육면체 한 변의 길이는 유리수이다.)

▶ 답 : ＿＿＿＿＿ cm

▷ 정답 : 2 cm

해설

정육면체의 한 변의 길이가 x cm라 하면

조건으로부터 $(x-1)(x+2)(x+3) = \frac{5}{2}x^3$,

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = \frac{5}{2}x^3$,

$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$3x^3 - 8x^2 - 2x + 12 = 0$을 풀면 $x = 2(\text{cm})$

18. 연립 방정식 $\begin{cases} 2x+y-z=8 \\ x-y+3z=-4 \\ 3x+2y+z=11 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y, z에 대하여 $3x-2y-z$의 값은 얼마인가?

① -1　　② 1　　③ -2　　④ 2　　⑤ 3

해설

$$\begin{cases} 2x+y-z=8 & \cdots ① \\ x-y+3z=-4 & \cdots ② \\ 3x+2y+z=11 & \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② : $3x+2z=4 \cdots$ ④

(2 × ①) − ③ : $x-3z=5 \cdots$ ⑤

$11z=-11 \quad \therefore\ z=-1$

④식에 z 값 대입 : $x=2$

①식에 x, z 값 대입 : $y=3$

$3x-2y-z=3\cdot 2-2\cdot 3-(-1)=1$

19. 두 방정식 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수는?

① 없다.　　② 1개　　③ 2개　　④ 3개　　⑤ 4개

해설

구하는 순서쌍 $(x,\ y)$는 연립방정식

$$\begin{cases} (x+y-1)(x-y-1)=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$ 의 해이다.

㉠에서 $y=\pm(x-1)$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-(x-1)^2=0$, $2x-1=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{2}$, ㉢에서 $y=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$

$\therefore\ (x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ 2개

20. 다음 중 옳은 것으로 짝지어진 것은?

(가) $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$

(나) $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 이면 $a > b$

(다) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > 0$ 이면 $ad > bc$

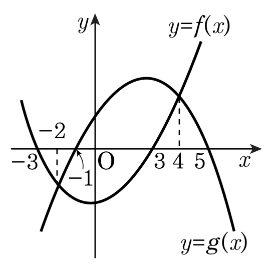
(라) $a > b > 0 > c > d$ 이면 $ad < bc$

① (가), (나)　② (나), (라)　③ (다), (라)　④ (나), (다)　⑤ (가), (다)

해설

(가) (반례) $a = 1,\ b = -2$일 때 성립하지 않음.
(나) 항상 성립함 $(a > 0,\ b \geq 0\ )$
(다) (반례) $a = -2,\ b = -1,\ c = 1, d = 1$일 때
성립하지 않음.
또는 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} > 0$에서
$bd > 0$일 때, $ad - bc > 0 \quad \therefore\ ad > bc$
$bd < 0$일 때, $ad - bc < 0 \quad \therefore\ ad < bc$
$\therefore$ 성립하지 않음.
(라) $ad < 0,\ bc < 0$이므로 $|ad| > |bc|$에서 $ad < bc$

21. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)g(x) > 0$의 해는?



① $x < -1$ 또는 $x > 3$

② $x < -1$ 또는 $4 < x < 5$

③ $-3 < x < -1$ 또는 $3 < x < 5$

④ $-3 < x < -2$ 또는 $4 < x < 5$

⑤ $-2 < x < -1$ 또는 $3 < x < 5$

해설

$f(x)g(x) > 0$ 에서 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ 또는 $f(x) < 0$, $g(x) < 0$

(i) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $3 < x < 5$

(ii) $f(x) < 0$, $g(x) < 0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $-3 < x < -1$

따라서 (i), (ii)에 의하여 구하는 부등식의 해는 $-3 < x < -1$ 또는 $3 < x < 5$

22. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 (x)로 나타낼 때, 방정식 $[x]+(x)=7$을 만족하는 x의 값을 모두 구하면?

① $\frac{7}{2}$ ② $3 \leq x \leq 4$ ③ $3 \leq x < 4$
④ $3 < x \leq 4$ ⑤ $3 < x < 4$

해설

$$[x] = \begin{cases} k \ (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

$$(x) = \begin{cases} k \quad (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k+1 \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

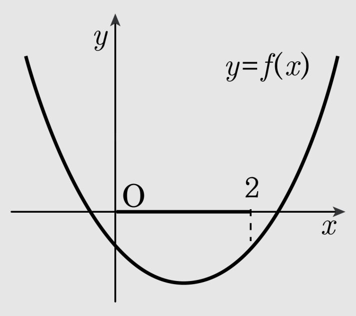
따라서, $[x]+(x)=7$ 이고
$[x]$, (x) 는 정수이므로
$[x]=3$, $(x)=4$ $(\because \ [x] \leq (x))$
$\therefore \ 3 < x < 4$

23. $0 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
$f(0) \le 0,\ f(2) \le 0$ 이어야 한다.



$f(0) = a^2 - 4 \le 0$
$\therefore\ -2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = -2a + a^2 \le 0$
$\therefore\ 0 \le a \le 2 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 \le a \le 2$
따라서 $M = 2,\ m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

24. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

ⅰ) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

ⅱ) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

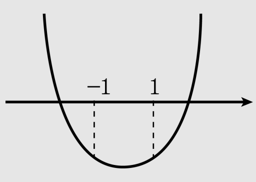
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위 : $-2<a<2$

25. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 크도록 실수 p의 범위를 정하면?

① $p>-\frac{1}{3}$ ② $p>1$ ③ $-\frac{1}{3}<p<1$
④ $p<-\frac{1}{3}$ ⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면



i) $f(-1)=1+p+1+2p-1=3p+1<0$

$\therefore p<-\frac{1}{3}$

ii) $f(1)=1-p-1+2p-1=p-1<0$

$\therefore p<1$

i) ii) 에서 $p<-\frac{1}{3}$