1. 실수 k에 대하여 복소수 $z = 3(k+2i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 되도록 k의 값을 정하면?

① -2　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$z = 3(k+2i) - k(-2i)$

$\quad = 3k + (6+2k)i \Rightarrow$ 순허수

$\therefore\ 3k = 0,\ k = 0$

2. 이차방정식 $x^2-x(kx-5)+3=0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$x^2-kx^2+5x+3=0$이 허근은 가지려면

$D=25-4\times 3(1-k)<0$

$25-12+12k<0 \quad \therefore 12k<-13$

$\therefore k<-\dfrac{13}{12}$이므로

정수 k의 최댓값은 -2

3. $x = 1 + \sqrt{2}i,\ y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x + y = 2,\ xy = 3$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4 - 6 = -2$

4. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$　② $\pm(2-3i)$　③ $\pm(3-2i)$
④ $\pm(3+3i)$　⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면
$(a+bi)^2 = a^2-b^2+2abi$ 에서
$a^2-b^2+2abi = 5-12i$
복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=5$, $2ab=-12$ 에서
$ab=-6$, $b=-\frac{6}{a}$ 이므로
$a^2-\left(-\frac{6}{a}\right)^2=5$, $a^2-\frac{36}{a^2}=5$
양변에 a^2 을 곱하면
$a^4-5a^2-36=0$, $(a^2-9)(a^2+4)=0$
따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로
$a=\pm3$ 또는 $a=\pm2i$
그런데 a 는 실수이므로 $a=\pm3$ 이고, $b=\mp2$ 이다.
따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

5. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 <u>서로 다른</u> 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.
$D' = 1^2 - (k-3) > 0$
$\therefore\ k < 4$
$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because\ k$는 정수)

6. 이차식 $ax^2+4x+2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1 ② $\pm\sqrt{2}$ ③ ± 2 ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$

$4-2a^2=0,\ a^2=2$

$\therefore a=\pm\sqrt{2}$

7. 다음 연립방정식을 만족하는 (x, y, z)가 바르게 짝지어진 것은?

$$3x - y = y + z = 3x - z = 1$$

① $(1, 1, 1)$　② $(-1, 1, 2)$　③ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$　⑤ $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$

해설

$3x - y = 1,\ y + z = 1,\ 3x - z = 1$

변변끼리 모두 더하면, $6x = 3,\ x = \frac{1}{2}$

각각 대입하면, $y = \frac{1}{2},\ z = \frac{1}{2}$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

8. 부등식 $|x+1|+|x-1| \geq 4$의 해는 $x \leq a$ 또는 $x \geq b$이다. $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(ⅰ) $x < -1$

$-(x+1)-(x-1) \geq 4$, $x \leq -2$

(ⅱ) $-1 \leq x < 1$

$x+1-(x-1) \geq 4$

$2 \geq 4$ (성립 안함)

(ⅲ) $x \geq 1$

$x+1+x-1 \geq 4$

$x \geq 2$

(ⅰ), (ⅲ)을 합하면 $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

$\therefore$ $a+b=0$

9. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 직선 $y = 0$과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 x축 $(y = 0)$과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D = a^2 - 12 > 0$에서
$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

10. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a \cdots$ ㉠
$y = x + 1 \qquad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

11. x가 실수일 때, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 가 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 가질 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a < 0$	㉡ $4a + b = 0$	㉢ $4a - c = -3$

① ㉠　② ㉢　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖는 이차함수는
$y = a(x-2)^2 + 3 (a < 0)$ 이다.
$ax^2 + bx + c = a(x-2)^2 + 3$ 이므로
$b = -4a$, $c = 4a + 3$ 이다.

12. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2ax-9+2a^2=0$ 이 실근 $\alpha,\ \beta$ 를 가질 때, $|\alpha-\beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+2ax-9+2a^2=0$ 에서
근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=-9+2a^2$
$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2a)^2-4(-9+2a^2)=-4a^2+36$
그런데 $\frac{D}{4}=a^2+9-2a^2\geq 0$
$\therefore\ -3\leq a\leq 3$
$\therefore\ 0\leq|\alpha-\beta|^2\leq 36$
즉, $0\leq|\alpha-\beta|\leq 6$
$\therefore$ (최댓값)$+$ (최솟값)$=0+6=6$

13. 삼차방정식 $(x-1)(x^2+x+a+1)=0$의 실근이 1뿐일 때, 실수 a의 범위를 구하면?

① $a > -\frac{3}{4}$　② $a > -\frac{3}{2}$　③ $a > -1$
④ $a > 0$　⑤ $a > 1$

해설

준식의 실근이 1뿐이기 위해서는 $x^2+x+a+1=0$의 근이 허근이거나 $x=1$을 중근으로 가져야 한다.
(i) 허근을 가질 경우
$D=1-4(a+1)<0$, $-3<4a$
$\therefore\ a > -\frac{3}{4}$
(ii) $x=1$을 중근으로 가질 경우
$D=1-4(a+1)=0$이고 $1+1+a+1=0$을 동시에 만족하는 a의 값은 없다.
(i), (ii)에서 $a > -\frac{3}{4}$

14. a, b가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$가 근이면 $1 - \sqrt{2}$도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, α라 하면
$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3$ ······㉠
$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a$······㉡
$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b$ ······㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 1$

15. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^6+\omega^2+\omega+1$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\omega^3=1,\ \omega^2+\omega+1=0$

$(\omega^3)^2+(\omega^2+\omega+1)=1^2+0=1$

16. A, B, C 세 사람의 수학 점수가 A와 B의 평균이 80 점, B와 C의 평균이 85 점, A와 C의 평균이 78 이다. A, B, C 세 사람의 수학 점수 평균은?

① 74 점　② 75 점　③ 79 점　④ 80 점　⑤ 81 점

해설

A, B, C 세 사람의 점수를 각각 a, b, c라 한다.

$\frac{a+b}{2} = 80,\ \frac{b+c}{2} = 85,\ \frac{c+a}{2} = 78$

모두 더하면 $\frac{2(a+b+c)}{2} = 243$

$a+b+c = 243$

$(\text{평균}) = \frac{a+b+c}{3} = \frac{243}{3} = 81$

17. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^2 4xy+y^2)=0$
이 때, x, y가 실수이므로 $xy-2$, $2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 x, y의 값은 $x=\pm 1$, $y=\pm 2$(복부호 동순)
따라서 x, y의 합은 $-3, 3$

18. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 x, y를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y가 양의 정수이므로

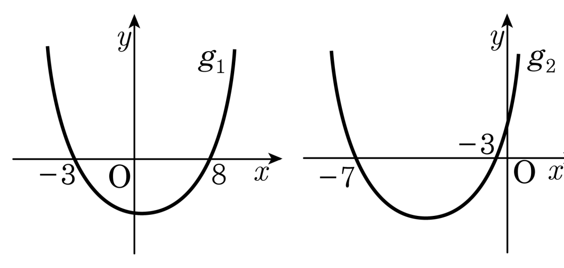
$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

19. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답: ____개

▷ 정답: 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

20. x에 관한 방정식 $x^2-2kx+(k^2-k)=0$이 실근 α,β를 갖고 $(\alpha-\beta)^2 \le 16$이 성립하기 위한 실수 k의 범위를 구하면?

① $-1 \le k \le 4$　② $-1 \le k \le 5$　③ $0 \le k \le 4$

④ $0 \le k \le 5$　⑤ $-2 \le k \le 2$

해설

i) 실근을 가지므로

$D \ge 0$에서 $k \ge 0 \cdots$①

ii) $(\alpha-\beta)^2 \le 16$에서

$(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \le 16$

$(2k)^2 - 4(k^2-k) \le 16$

$\therefore\ k \le 4 \cdots\cdots$②

$\therefore$ ①, ②에서 $0 \le k \le 4$

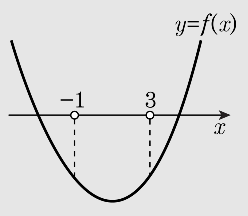
21. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \leq 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \leq 0$, $k+3 \leq 0$
$\therefore k \leq -3$
(ii) $f(3) \leq 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \leq 0$, $9k+3 \leq 0$
$\therefore k \leq -\frac{1}{3}$
(i), (ii) 에서 $k \leq -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

22. 자연수 n에 대해 $x=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n}+\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2}\right\}^{n}+\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2}\right\}^{n}$$

$$=\left(\frac{2}{2i}\right)^{n}+\left(\frac{2}{-2i}\right)^{n}$$

$$=\left(\frac{1}{i}\right)^{n}+\left(-\frac{1}{i}\right)^{n}=(-i)^{n}+i^{n}$$

i^n 은 $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, $n=4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n=4k$ 이면 $x=1+1=2$

(ii) $n=4k+1$ 이면 $x=-i+i=0$

(iii) $n=4k+2$ 이면 $x=-1-1=-2$

(iv) $n=4k+3$ 이면 $x=i-i=0$

$\therefore\ x=2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

23. 복소수 z 에 대하여 다음 보기 중 항상 실수인 것을 모두 고르면?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $z \neq 0$ 이다

㉠ $z+\bar{z}$	㉡ $z\bar{z}$	㉢ $(z-\bar{z})^2$
㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}$	㉤ $\frac{\bar{z}}{z}$	

① ㉠
② ㉠ ,㉡
③ ㉠ ,㉡ ,㉢
④ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣
⑤ ㉠ ,㉡ ,㉢ ,㉣ ,㉤

해설

$z=a+bi$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\bar{z}=a-bi$

㉠ $z+\bar{z}=2a$

㉡ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

㉢ $(z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2$

㉣ $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}-\frac{a+bi}{a^2+b^2}=\frac{-2bi}{a^2+b^2}$

㉤ $\frac{\bar{z}}{z}=\frac{(a-bi)^2}{a^2+b^2}$

24. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x+1>0$이 항상 성립할 때, k의 범위를 구하면?

① $k<1,\ k>2$ ② $1<k<2$ ③ $-2\le k\le 2$

④ $k\le 1,\ k>2$ ⑤ $1\le k<2$

해설

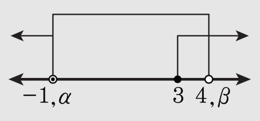
ⅰ) $k\ne 1$일 때, 주어진 부등식이 성립하려면
판별식이 0보다 작아야 한다
$D'=(k-1)^2-(k-1)<0$
$\Rightarrow (k-1)(k-2)<0$
$\Rightarrow\ 1<k<2$
ⅱ) $k=1 \Rightarrow\ 1>0$ 성립
$\therefore k$의 범위 : $1\le k<2$

25. 두 부등식 $x^2-2x-3>0$,
$x^2+ax+b\le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3<x\le 4$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① -6　② -7　③ -8　④ -9　⑤ -10

해설

$(x+1)(x-3)>0 \Rightarrow \quad x<-1$ 또는 $x>3$
$x^2+ax+b\le 0 \Rightarrow \alpha\le x\le\beta$ 라 하자
주어진 조건을 만족하려면



$\therefore \alpha=-1, \beta=4$
$(x+1)(x-4)=x^2-3x-4$
$a=-3, b=-4$
$\therefore a+b=-7$