

1. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$ 이 허근을 가질 때, 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < 1$

② $-1 < m < 1$

③ $m < -1$ 또는 $m > 1$

④ $m > 1$

⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면

$$D/4 = 1 - m < 0$$

$$\therefore m > 1$$

2. $0 < a < b$ 인 실수, a, b 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

③ $\frac{a}{1+a} > \frac{b}{1+b}$

⑤ $\frac{a}{1+a} = \frac{b}{1+b}$

② $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$

④ $\frac{a}{1+a} \geq \frac{b}{1+b}$

해설

$0 < a < b$ 에서 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \dots \textcircled{㉠}$

㉠의 양변에 1을 더하면

$\frac{1}{a} + 1 > \frac{1}{b} + 1, \frac{1+a}{a} > \frac{1+b}{b} \dots \textcircled{㉡}$

따라서 ㉡의 역수를 취하면 $\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b}$

3. $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$ 의 값은?

- ① $-26 - 25i$
- ② $-26 + 25i$
- ③ 0
- ④ $-25 + 26i$
- ⑤ $25 + 26i$

해설

$$\begin{aligned} & i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50} \\ &= \{i + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-i) + 4 \cdot 1\} + \\ & \{5i + 6 \cdot (-1) + 7 \cdot (-i) + 8 \cdot 1\} \\ &+ \cdots + \{45i + 46 \cdot (-1) + 47 \cdot (-i) + 48 \cdot 1\} + 49i + 50 \cdot (-1) \\ &12(2 - 2i) + 49i - 50 = -26 + 25i \end{aligned}$$

4. x 에 대한 일차방정식 $(a^2 + 3)x + 1 = a(4x + 1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2 + 3 - 4a)x = a - 1$
모든 x 에 대해 성립하려면
 $a^2 - 4a + 3 = 0, a - 1 = 0$
공통근 : $a = 1$

5. $2|x-1|+x-4=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x < 1$ 일 때,
 $-2(x-1) + (x-4) = 0$
 $\therefore x = -2$
ii) $x \geq 1$ 일 때,
 $2(x-1) + x-4 = 0$
 $\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는 $x = -2$ 또는 $x = 2$ 이다.

6. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a+2=0, b-1=0$

따라서 $a=-2, b=1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

7. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
 $x^2 = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 13t + 36 = 0, (t - 4)(t - 9) = 0$
 $\therefore t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
 $\therefore x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
 $\therefore x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
 $(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

8. $-1 < x < 3$ 일 때, $A = 2x - 3$ 의 범위는?

① $1 < A < 3$

② $-1 < A < 3$

③ $-3 < A < 5$

④ $-5 < A < 3$

⑤ $3 < A < 5$

해설

$-1 < x < 3$ 에서 양변에 2를 곱하고 3을 빼면

$$-2 - 3 < 2x - 3 < 6 - 3$$

$$\therefore -5 < 2x - 3 < 3$$

9. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 두 근이 3, b 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$ 이 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 근이므로
 $9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore a = 7$
이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$
그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$
 $\therefore b = 4 \quad \therefore ab = 28$

10. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $3 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

한근이 $3 + \sqrt{2}$ 이므로 켤레근인 $3 - \sqrt{2}$ 도 근이 된다.

이차방정식의 두 근의 합이 $-a$ 이므로,

$$-a = (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 6 \quad \therefore a = -6$$

두근의 곱이 b 이므로

$$b = (3 + \sqrt{2}) \cdot (3 - \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7 \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore a + b = -6 + 7 = 1$$

11. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x) - f(-x) = x^2 - 3x + 8$

- ① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면

$$2(ax^2 + bx + c) - (ax^2 - bx + c) = x^2 - 3x + 8$$

$$\Rightarrow b = -1, c = 8, a = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 8 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$$

$$\Rightarrow \text{최솟값} : \frac{31}{4}$$

12. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x + a)^2 + a^2 + 4a - 4$$

이므로 $x = -a$ 일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.

$$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a + 2)^2 - 8$$

따라서 M 은 $a = -2$ 일 때 최댓값 -8 을 가진다.

13. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
 $y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots \textcircled{1}$
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
 $t \geq 2 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 의 범위에서 $\textcircled{1}$ 의 최솟값은
 $t = 2$ 일 때 1이다.

14. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β 라 하면
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\beta + (1 - \sqrt{2})\beta = 5$
 $-1 + 2\beta = 5, 2\beta = 6 \quad \therefore \beta = 3$
따라서, $a = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + 3 = 5$
 $b = (1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) \cdot 3 = -3$ 이므로
 $a + b = 5 + (-3) = 2$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=3 \\ x^2+2xy+y^2=1 \end{cases}$ 에서 xy 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = x - 3$ 을 이차식에 대입하면

$$x^2 + 2x(x - 3) + (x - 3)^2 = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\therefore x = 1, 2$$

$$(i) \ x = 1 \text{ 일 때 } y = -2$$

$$(ii) \ x = 2 \text{ 일 때 } y = -1$$

$$\text{따라서 } xy = -2$$

16. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

17. $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 의 해가 $x < -\frac{1}{3}$ 일 때, 부등식 $(a-3b)x + (b-2a) > 0$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < -3$

해설

$$\begin{aligned}(a+b)x + (2a-3b) &< 0 \\(a+b)x &< 3b-2a \\ \Rightarrow x &< \frac{3b-2a}{a+b} = -\frac{1}{3} \quad (a+b > 0) \\ \Rightarrow a+b &= -3(3b-2a) \\ \Rightarrow a=2b, \quad a+b=3b > 0 &\rightarrow b > 0 \\ (a-3b)x + (b-2a) > 0 &\Leftrightarrow -bx-3b > 0 \\ bx &< -3b \\ \therefore x &< -3 \quad (\because b > 0)\end{aligned}$$

18. x 에 대한 이차부등식 $x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 일 때 상수 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + ax + b > 0$ 의 해가 $x < 1$ 또는 $x > 4$ 이라면
 $(x - 1)(x - 4) > 0$ 에서 $x^2 - 5x + 4 > 0$ 이므로
 $a = -5, b = 4$ 따라서 $a + b = -1$

19. 다음 연립부등식을 만족하는 정수 x 의 개수는?

$$\begin{cases} |x+3| > 1 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + 4x - 3 \leq 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$$\begin{cases} |x+3| > 1 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + 4x - 3 \leq 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① : $x+3 > 1, x+3 < -1$

$x > -2$ 또는 $x < -4$

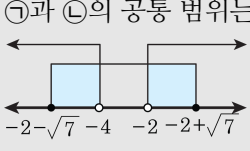
② : $x^2 + 4x - 3 = 0$ 에서

$x = -2 \pm \sqrt{4+3} = -2 \pm \sqrt{7}$

$\therefore$ 부등식의 해는

$-2 - \sqrt{7} \leq x \leq -2 + \sqrt{7}$

①과 ②의 공통 범위는



$-2 - \sqrt{7} \leq x < -4, \quad -2 < x \leq -2 + \sqrt{7}$

정수 x : $-1, 0$ (2 개)

20. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

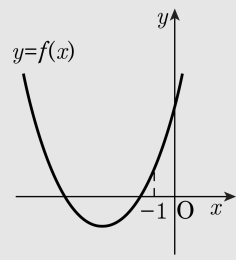
▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면

방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (6 - k) > 0$ 에서

$$k^2 + k - 6 > 0, (k + 3)(k - 2) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 2$$

(ii) $f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0$ 에서 $k > -7$

(iii) $-\frac{-2k}{2} < -1$ 에서 $k < -1$

이상에서 $-7 < k < -1$

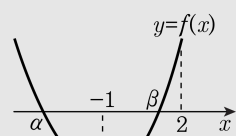
따라서 정수 k 는 $-6, -5, -4$ 의 3개다.

21. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

- ① $-2 < a < 0$ ② $-2 < a < 1$ ③ $0 < a < 2$
 ④ $1 < a < 2$ ⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0$, $f(2) > 0$

(i) $f(-1) = 1 - 2a + a^2 - 1 < 0$ 에서 $a^2 - 2a < 0$, $a(a-2) < 0$
 $\therefore 0 < a < 2$

(ii) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0$, $(a+3)(a+1) > 0$
 $\therefore a < -3$, $a > -1$

(i), (ii)에서 $0 < a < 2$

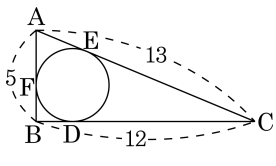
22. $x^2 - xy - 6y^2 + x + 7y + k$ 가 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k 의 값을 정하면?

- ① -2 ② -4 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

x 에 관해 식을 정리하면
 $f(x) = x^2 + (1 - y)x + (-6y^2 + 7y + k)$
 $f(x)$ 가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면
 $D = (1 - y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$ 가 완전제곱식이어야 한다.
 $D = 25y^2 - 30y + (1 - 4k)$ 에서
 $\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1 - 4k) = 0$
 $\therefore k = -2$

23. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 13$, $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에 내접하는 원이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ 에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{BF} = \alpha$, $\overline{AE} = \beta$ 라 할 때, α , β 를 두 근으로 하고 x^2 이 계수가 1인 이차방정식은?



- ① $x^2 - 5x + 6 = 0$ ② $x^2 + 5x + 6 = 0$
 ③ $x^2 - 12x + 20 = 0$ ④ $x^2 + 12x + 20 = 0$
 ⑤ $x^2 - 13x + 30 = 0$

해설

$\overline{BF} = \overline{BD} = \alpha$, $\overline{AF} = \overline{AE} = 5 - \alpha = \beta$,
 $\overline{CD} = \overline{CE} = 12 - \alpha$
 그런데 $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$ 이므로
 $(5 - \alpha) + (12 - \alpha) = 13$
 $2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$
 $\overline{AE} = 5 - 2 = 3 \quad \therefore \beta = 3$
 두 수 2, 3을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은
 $x^2 - (2 + 3)x + 2 \times 3 = 0$
 $\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

24. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab 의 값은?

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0, \quad x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + a = 0$

- ① -1
- ② 3
- ③ $-\frac{9}{4}$
- ④ $\frac{9}{16}$
- ⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면 $(x - 1)^2(x + 3) = 0$ ∴ $x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$ 인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 a, b 값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$ 인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$ 을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{㉠}}$

$\{9 - 3b + a = 0\} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{㉡}}$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4}, \quad b = \frac{9}{4}, \quad ab = -\frac{81}{16}$

25. 사차방정식 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$ 은 i 를 한 근으로 갖는다. 이 방정식의 나머지 세 근의 곱을 구하면? (단, a, b 는 실수)

- ① $-i$
- ② i
- ③ $-2i$
- ④ $3i$
- ⑤ $1 + 2i$

해설

$x = i$ 를 방정식에 대입하면 $i^4 - 3i^3 + 2i^2 + ai + b = 0$
 $(a + 3)i + b - 1 = 0$ 에서 a, b 는 실수이므로 $a = -3, b = 1$
따라서, 주어진 방정식은 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$
한편, $x = i$ 에서 $x^2 + 1 = 0$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + kx + 1)$
우변을 전개해서 계수비교하면 $k = -3$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$
따라서 나머지 세 근은 $-i$ 와 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이고
 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근의 곱은 1이다.
 $\therefore$ 나머지 세 근의 곱은 $-i \times 1 = -i$

해설

4차방정식 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 에서 네 근의 합은 $-\frac{b}{a}$,
네 근의 곱은 $\frac{e}{a}$
 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 네 근의 곱은 1
즉 ix (나머지 세 근의 곱)= 1
 $\therefore$ 나머지 세근의 곱은 $\frac{1}{i} = -i$