1. 다음 등식 $x+y+(2x-y)i=2+7i$를 만족하는 두 실수 x, y에 대하여 xy값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 3　② −3　③ 0　④ 5　⑤ −5

해설

$x+y+(2x-y)i=2+7i$
$\Rightarrow x+y-2+(2x-y-7)i=0$
$\Rightarrow x+y-2=0, 2x-y-7=0$
연립하면, $x=3,\ y=-1$

2. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$이 허근을 가질 때, 실수 m의 범위를 구하면?

① $m < 1$
② $-1 < m < 1$
③ $m < -1$ 또는 $m > 1$
④ $m > 1$
⑤ $m > -1$

해설
주어진 이차방정식이 허근을 가지려면
$D/4 = 1 - m < 0$
$\therefore m > 1$

3. $(1+i)\,x^2 + 2\,(1+2i)\,x - 3 + 3i$ 가 순허수일 때, x 의 값은?

① 0　　② 1　　③ -3　　④ 1, 3　　⑤ -1

해설

$(1+i)\,x^2 + 2\,(1+2i)\,x - 3 + 3i$
$= x^2 + x^2 i + 2x + 4xi - 3 + 3i$
$= (x^2 + 2x - 3) + (x^2 + 4x + 3)i$
순허수를 만족하려면 실수부$= 0$, 허수부$\neq 0$이어야 한다.
$x^2 + 2x - 3 = 0$이면서, $x^2 + 4x + 3 \neq 0$인 x값을 찾아야 한다.
$\therefore x = 1$

4. 제곱해서 $5-12i$ 가 되는 복소수는?

① $\pm(2+3i)$　② $\pm(2-3i)$　③ $\pm(3-2i)$

④ $\pm(3+3i)$　⑤ $\pm(3+3i)$

해설

구하려는 복소수를 $a+bi$ ($a,\ b$ 는 실수)로 놓으면

$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ 에서

$a^2-b^2+2abi=5-12i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=5$, $2ab=-12$ 에서

$ab=-6$, $b=-\dfrac{6}{a}$ 이므로

$a^2-\left(-\dfrac{6}{a}\right)^2=5$, $a^2-\dfrac{36}{a^2}=5$

양변에 a^2 을 곱하면

$a^4-5a^2-36=0$, $(a^2-9)(a^2+4)=0$

따라서 $a^2=9$ 또는 $a^2=-4$ 이므로

$a=\pm3$ 또는 $a=\pm2i$

그런데 a 는 실수이므로 $a=\pm3$ 이고, $b=\mp2$ 이다.

따라서 구하는 복소수는 $\pm(3-2i)$ 이다.

5. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

6. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore$ $x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 -1, 2이므로 $-1 + 2 = 1$이다.

7. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$에서

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(ⅰ) $t = 4$일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ⅱ) $t = 9$일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+3z=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

의 해를 $x=a, y=b, z=c$라 할 때, $a(b+c)$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

㉡ − ㉢에서 $2y-x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉣

㉠ + ㉣에서 $4y=2 \quad \therefore\ y=\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots$ ㉤

㉠, ㉡, ㉤ 에서 $x=1,\ z=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a(b+c)=1\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$

9. $A=\dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때 $1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$ 을 간단히 하면?

① 1　② i　③ 0　④ -1　⑤ $-i$

해설

$A=\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=i$

$A^2=i^2=-1,\ A^3=i^3=-i,\ A^4=i^4=1$

$\therefore\ 1+A+A^2+A^3+\cdots+A^{100}$

$=1+(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots$

$+(A^{97}+A^{98}+A^{99}+A^{100})$

$=1+(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$

$=1$

10. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1　② 2　③ 4　④ 10　⑤ 20

해설

$\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$
$= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta)$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$
$= (1 + i)(1 - i)$
$= 2$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2 + bx = -(a^2 - 3bx + c^2)$이 중근을 가질 때, a, b, c를 세 변의 길이로 갖는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 둔각삼각형
② a가 빗변인 직각삼각형
③ b가 빗변인 직각삼각형
④ $a = b$인 이등변삼각형
⑤ $b = c$인 이등변삼각형

해설

주어진 식을 정리하면
$x^2 - 2bx + a^2 + c^2 = 0$이
방정식이 중근을 가지므로
$\frac{D}{4} = (-b)^2 - (a^2 + c^2) = 0$
$\therefore b^2 = a^2 + c^2$
따라서 b가 빗변인 직각삼각형이다.

12. 이차방정식 $9x^2 - 2kx + k - 5 = 0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 k값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

작은 근을 α라 하면, 큰 근은 $\alpha + 2$이므로

$\alpha + \alpha + 2 = \dfrac{2k}{9}$ ……㉠

$\alpha(\alpha + 2) = \dfrac{k - 5}{9}$ ……㉡

㉠에서 $\alpha = \dfrac{k}{9} - 1$,

이것을 ㉡에 대입하면

$k^2 - 9k - 36 = 0$, $(k - 12)(k + 3) = 0$

$\therefore\ k = 12,\ -3$

해설

두 근의 차 공식을 이용하면,

$\dfrac{\sqrt{(2k)^2 - 4 \cdot 9(k - 5)}}{|9|} = 2$에서

$\sqrt{4k^2 - 36(k - 5)} = 18$

양변을 제곱하여 정리하면,

$k^2 - 9k - 36 = 0 \therefore\ k = 12,\ -3$

13. 함수 $y = -\left(x^2 + 4x + 5\right)^2 - 2\left(x^2 + 4x\right) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -\left(x^2 + 4x + 5\right)^2 - 2\left(x^2 + 4x\right) - 6$ 에서
$x^2 + 4x + 5 = t$ 로 놓으면
$y = -\left(x^2 + 4x + 5\right)^2 - 2\left(x^2 + 4x + 5\right) + 4$
$= -t^2 - 2t + 4 = -(t + 1)^2 + 5$
그런데 $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로
$t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m = -2,\ M = 1$
$\therefore M + m = -1$

14. m이 실수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$의 두 실근 α,β에 대하여 $\alpha\beta$의 최댓값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$x^2+2mx+2m^2-2m-3=0$이 실근을 가지므로

$\frac{D}{4}=m^2-(2m^2-2m-3)\geq 0$

$m^2-2m-3\leq 0, (m+1)(m-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq m\leq 3$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=2m^2-2m-3=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{2}$

이 때, $-1\leq m\leq 3$이므로 $m=3$일 때

$\alpha\beta$의 최댓값은 9이다.

15. 삼차방정식 $x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$,$\alpha\beta\gamma$를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 일 때, $a-2b+c$의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$x^3+x^2+2x-3=0$ 의 세 근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-1$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2$, $\alpha\beta\gamma=3$

구하려는 방정식의 세 근의 합

$-1+2+3=4 \quad \therefore a=-4$

$(-1)\times 2+2\times 3+(-1)\times 3=-2+6-3=1 \quad \therefore b=1$

세 근의 곱 $(-1)\times 2\times 3=-6 \quad \therefore c=6$

$\therefore a-2b+c=-4-2+6=0$

16. a, b가 유리수일 때, $x = 1 + \sqrt{2}$가 $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$의 근이 된다. 이 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

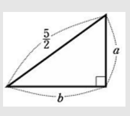
해설

유리계수 방정식이므로 $1 + \sqrt{2}$가 근이면 $1 - \sqrt{2}$도 근이다.
주어진 방정식의 세 근을 $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$, α라 하면
$(1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 3$ ⋯⋯㉠
$(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + \alpha(1 + \sqrt{2}) + \alpha(1 - \sqrt{2}) = a$ ⋯⋯㉡
$\alpha(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = -b$ ⋯⋯㉢
㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 1$

17. 빗변의 길이가 $\frac{5}{2}$ 인 직각 삼각형의 넓이가 $\frac{3}{2}$ 일 때, 빗변이 아닌 두 변의 길이의 합은?

① $\frac{\sqrt{37}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{34}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{31}}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설



직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a, b 라 하면넓이는

$\frac{1}{2}ab = \frac{3}{2} \quad \cdots ①$

$a^2 + b^2 = \frac{25}{4} \quad \cdots ②$

①, ②식에서

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$= \frac{25}{4} + 6 = \frac{49}{4}$

$\therefore \ a + b = \frac{7}{2}$

18. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$

$(x-3)(y+2)=4$

$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x-3=1,\ y+2=4$

$\therefore\ x=4,\ y=2$

19. 부등식 $|x+1|+|x-2|<5$를 만족하는 정수 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$|x+1|+|x-2|<5$

구간을 나누어 부등식을 풀어보면

ⅰ) $x<-1$일 때

$-x-1-x+2<5$

$x>-2$

$\therefore -2<x<-1$: 정수 없음

ⅱ) $-1\le x<2$일 때

$x+1-x+2<5$

$2<5$: 항상 성립

$\therefore -1\le x<2$: 정수 $-1,\ 0,\ 1$

ⅲ) $x\ge 2$일 때

$x+1+x-2<5$

$x<3$

$\therefore 2\le x<3$: 정수 2

만족하는 정수 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$이므로 4개

20. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 이차부등식 $cx^2-bx+a>0$의 해는?(단, $\alpha>0$이다.)

① $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$　　② $-\beta<x<-\alpha$
③ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$　　④ $x>\frac{1}{\alpha},\ x<\frac{1}{\beta}$
⑤ $x>-\frac{1}{\beta},\ x<-\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

$a<0,\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$cx^2-bx+a>0$

에서 $a<0$이므로 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-\frac{b}{a}x+1<0$

$\therefore \alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

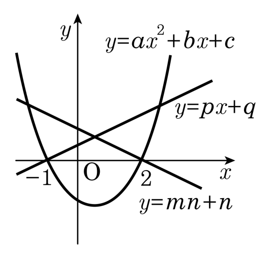
$\therefore (\alpha x+1)(\beta x+1)<0$이고

$0<\alpha<\beta$에서 $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$이므로

$-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$

$\therefore -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$

21. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 와 두 직선 $y = px + q$, $y = mx + n$ 이 x축 위의 두 점 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ 에서 만나고 있다. 이 때, 다음 연립부등식의 해는?

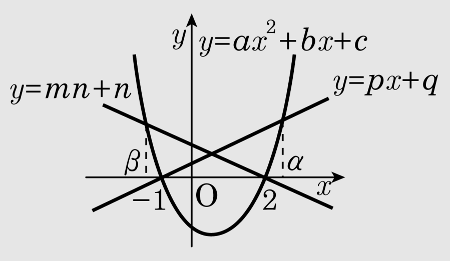


$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < px + q \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$$

① $-1 < x < 3$　② $0 < x < 2$　③ $0 < x < 3$
④ $-1 < x < 2$　⑤ $-2 < x < 3$

해설

주어진 연립부등식의 해는 포물선이 두 직선 보다 모두 아래에 있는 부분이다.



$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < px + q & \cdots ㉠ \\ ax^2 + bx + c < mx + n & \cdots ㉡ \end{cases}$$

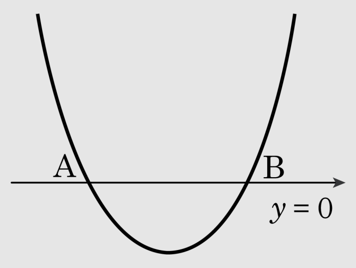
㉠ 식의 근 $-1 < x < \alpha$ $(\alpha > 2)$ $\cdots$ (i)
㉡ 식의 근 $\beta < x < 2$ $(\beta < -1)$ $\cdots$ (ii)
(i), (ii) 을 동시에 만족하는 x의 범위는 $-1 < x < 2$

22. 이차함수 $y = x^2+ax+a$ 가 x 축과 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2\sqrt{3}$ 이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

해설



$\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ $\mathrm{B}(\beta,\ 0)$ 이라고 하면 $(\therefore\ \alpha < \beta)$

$\alpha + \beta = -a$

$\alpha\beta = a$ 이므로

$(\therefore\ y = x^2 + ax + a)$

$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\ = a^2 - 4a$

$\overline{\mathrm{AB}} = \beta - \alpha\ = 2\sqrt{3}$ 이므로

$a^2 - 4a = 12$

$(a - 6)(a + 2) = 0$

$\therefore\ a = -2,\ 6$

23. 부등식 $x^2-4x+3>0$과 $2x^2+(a-8)x-4a<0$을 동시에 만족하는 정수인 x의 값이 0뿐 일 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a \le 2$ ② $0 \le a < 2$ ③ $0 < a \le 2$
④ $-1 < a \le 0$ ⑤ $-1 \le a < 0$

해설

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)>0$

$\therefore\ x>3$ 또는 $x<1 \cdots$①

$2x^2+(a-8)x-4a$

$=(2x+a)(x-4)<0$

한편, 만족하는 해가 0뿐이므로

$-\frac{a}{2}<4$

$\therefore\ -\frac{a}{2}<x<4\cdots$②

①과 ②에 의하여 $-1 \le -\frac{a}{2} < 0$

$\therefore\ 0<a\le 2$

24. 이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a < 1$　② $1 \le a < 2$　③ $2 \le a < 3$
④ $3 \le a < 4$　⑤ $4 \le a < 5$

해설

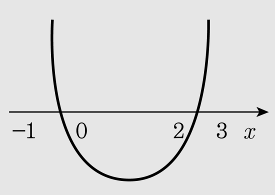
$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x-a)^2 - a^2 + a + 2$
ⅰ) $D/4 = a^2 - a - 2 \ge 0$,　$a \le -1$ or $a \ge 2$
ⅱ) $f(1) = 1 - 2a + a + 2 > 0$　$\therefore a < 3$
ⅲ) 대칭축 $x = a > 1$
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 $2 \le a < 3$

25. 이차방정식 $ax^2-(a+1)x-1=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $-1<\alpha<0$, $2<\beta<3$이 성립하도록 상수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a>0$)

① $\frac{2}{3}<a<1$ ② $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$ ③ $\frac{3}{2}<a<2$
④ $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}<a<3$

해설

$f(0)=-1<0$ 이므로 $y=ax^2-(a+1)x-1$의
그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-1) = a+(a+1)-1 > 0$에서 $a>0$ ⋯ ㉠

$f(2)=4a-2(a+1)-1<0$에서 $a<\frac{3}{2}$ ⋯ ㉡

$f(3)=9a-3(a+1)-1>0$에서 $a>\frac{2}{3}$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢ 에서 $\frac{2}{3}<a<\frac{3}{2}$