1. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{1-2i}{2+3i}+\frac{1+2i}{2-3i}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{8}{13}$

해설

(준식)

$=\frac{(1-2i)(2-3i)+(1+2i)(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$=\frac{(2-6)+(-4-3)i+(2-6)+(4+3)i}{2^2+3^2}$

$=\frac{(-4-7i)+(-4+7i)}{13}$

$=-\frac{8}{13}$

2. 복소수에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 찾으면?

① $2+i$의 허수 부분은 $2i$ 이다.

② $-5i$는 순허수이다.

③ i^3은 허수이다.

④ $1+\sqrt{3}i$의 켤레복소수는 $1-\sqrt{3}i$이다.

⑤ $1-\frac{1}{i}$는 실수이다.

해설

① $2+i$ 의 허수부분 : i (×)
② $-5i$ 는 순허수 (○)
③ $i^3=-i$ 허수(○)
④ $\overline{1+\sqrt{3}i}=1-\sqrt{3}i$ (○)
⑤ $1-\frac{1}{i}=1+i$ 복소수 (×)

3. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=-\sqrt{12}$　　② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=-\sqrt{12}$　　④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}i=-\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}=\sqrt{12}i$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}i$

4. 이차방정식 $2x^2-4x+5=0$의 두 근을 α와 β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 7

해설

$2x^2-4x+5=0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=2^3-3\times\frac{5}{2}\times 2\\&=8-15=-7\end{aligned}$$

5. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = x^2 - 2x - 3 \ (0 \le x \le 4)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 5

▷ 정답 : 최솟값 −4

해설

먼저, 주어진 식을 $y = a(x-m)^2 + n$ 의 꼴로 변형하여그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 조사한다.

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = -4$

양끝점 : $\begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$

$x = 4$ 에서 최댓값 5 , $x = 1$ 에서 최솟값 −4

6. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2
② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1
③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2
④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)
⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\ \hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\ \hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

7. 연립방정식 $ax + by = 8$, $2ax - by = -2$의 근이 $x = 1$, $y = 2$일 때, a, b의 값은?

① $a = -2$, $b = -3$
② $a = 3$, $b = 2$
③ $a = 2$, $b = -3$
④ $a = 2$, $b = 3$
⑤ $a = -3$, $b = -2$

해설

$ax + by = 8$, $2ax - by = -2$

근이 $x = 1, y = 2$이므로

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$$

$\therefore\ a = 2, b = 3$

8. 다음 연립방정식의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 2x-3y+3z=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+y-2z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-2y+z=5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

㉠ − ㉢ × 3 을 하면 $-x+3y=-5$ ······㉣
㉡ + ㉢ × 2 를 하면 $5x-3y=13$ ······㉤
㉣ + ㉤ 을 하면 $4x=8$ $\therefore\ x=2$
$x=2$ 를 ㉣에 대입하면 $-2+3y=-5\ \therefore\ y=-1$
또, $x=2,\ y=-1$ 을 ㉢에 대입하면
$2-2\cdot(-1)+z=5$
$\therefore\ z=1$
$\therefore\ x=2,\ y=-1,\ z=1$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4+1+1=6$

9. $-1 < x \leqq 2,\ 1 < y \leqq 3$일 때, $a < x-y < b$를 계산하여 $b-a$의 값을 구하면?

① -14 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ -5

해설

$-1 < x \leq 2,\ 1 < y \leq 3$에서
$x-y$의 가장 작은 값은 $-1-3=-4$
가장 큰 값은 $2-1=1$
$\therefore -4 < x-y < 1$이므로 $a=-4,\ b=1$
$b-a=1+4=5$

10. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ii) $x\geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

11. 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$이 <u>서로 다른</u> 두 실근을 가질 때, 정수 k의 최대값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$D' = 1^2 - (k-3) > 0$

$\therefore\ k < 4$

$\therefore$ 최댓값은 3 ($\because$ k는 정수)

12. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$
② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$
③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$
④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$
⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

13. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=5 \\ y+z=6 \\ z+x=7 \end{cases}$ 을 풀면?

① $x=2, y=3, z=4$ ② $x=2, y=3, z=-4$
③ $x=2, y=3, z=5$ ④ $x=2, y=-3, z=4$
⑤ $x=3, y=2, z=4$

해설

주어진 식을 모두 더하면
$2(x+y+z)=18,\ x+y+z=9 \quad \cdots ㉠$
다시 주어진 식에 ㉠을 각각 대입한다.
$\Rightarrow \quad x=3,\ \ y=2,\ \ z=4$

14. 부등식 $|x-3| \geq 2$의 해로 다음 중 옳은 것은?

① $1 \leq x \leq 5$
② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$
③ $-1 \leq x \leq 5$
④ $x \leq -1$ 또는 $x \geq 5$
⑤ $-5 \leq x \leq -1$

해설

$|x-3| \geq 2$에서 $x-3 \geq 2$ 또는 $-(x-3) \geq 2$ $\therefore$ $x \geq 5$ 또는 $x \leq 1$

15. 모든 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{mx^2-mx+2}$가 0이 아닌 실수가 될 실수 m의 값의 범위는?

① $0<m<4$ ② $4\le m\le 8$ ③ $0\le m<8$
④ $4<m\le 8$ ⑤ $m\ge 8$

해설

$\sqrt{mx^2-mx+2}$가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2-mx+2>0$
이어야 한다.
ⅰ) $m=0$일 때 $0\cdot x^2-0\cdot x+2>0$이므로
모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.
ⅱ) $m\ne 0$일 때 $mx^2-mx+2>0$가
모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면
$m>0\cdots$ ㉠
또 이차방정식 $mx^2-mx+2=0$의 판별식을
D라 할 때
$D=(-m)^2-8m<0$, $m(m-8)<0$
$\therefore 0<m<8\cdots$㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0<m<8$
ⅰ), ⅱ)에서 $0\le m<8$

16. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면
$-8 \le x^2-8 \le 8$
$0 \le x^2 \le 16$
$\therefore -4 \le x \le 4$
$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면
$-k<x-2<k$
$-k+2<x<k+2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면
$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로
$k \le 6,\ k \le 2$
$\therefore 0<k \le 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

17. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

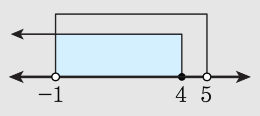
㉠ $2x \le x+4$,

$\therefore x \le 4$

㉡ $x^2-4x-5<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$

$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의

공통범위는 $-1<x\le 4$

$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

18. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

19. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 $\alpha,\ \alpha + 2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha = k - 1$을 ㉡에 대입하면,
$(k - 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 3$
$\therefore\ k = -2$

20. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면
$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$
$(a - b)p + a - b = 0$
$(a - b)(p + 1) = 0$
$a \neq b$ 이므로 $p = -1$
그런데 교점이 x 축 위에 있으므로
교점의 y 좌표는 0 이다.
$\therefore 1 + a + b = 0$
$\therefore a + b = -1$

21. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+2}{3} = t$ 라 하면

$x = 2t - 1$, $y = 5t + 3$, $z = 3t - 2$ 이므로

$x^2 - y^2 + z^2 = (2t-1)^2 - (5t+3)^2 + (3t-2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \dfrac{1}{2}$, $t \geq -\dfrac{3}{5}$, $t \geq \dfrac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \dfrac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t = \dfrac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \dfrac{2}{3} - 4 = -40$

22. $x^2 - x + 1 = 0$일 때, x^{51}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$에서

$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$

$\therefore x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1$

$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

23. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 최솟값을 구하여라.

① -8　　② -6　　③ -4　　④ -2　　⑤ 0

해설

$\begin{cases} (2x - y)(x + 2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$

1) $y = 2x$일 때

$x^2 + 4x^2 = 5x^2 = 20$

$\therefore\ x = \pm 2,\ y = \pm 4$

2) $x = -2y$일 때

$4y^2 + y^2 = 5y^2 = 20$

$\therefore\ y = \pm 2,\ x = \mp 4$

$(x,\ y) = (2,\ 4), (-2,\ -4), (-4,\ 2), (4,\ -2)$

$\therefore\ \alpha + \beta = \ 6,\ -6,\ -2,\ 2$

그러므로 $\alpha + \beta$의 최솟값은 -6

24. $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<5$일 때, $ax^2-bx+c-2b>0$의 해를 구하면?

① $x<-1,\ x>4$　② $x<-4,\ x>1$　③ $-1<x<4$
④ $-4<x<1$　⑤ $-4<x<-1$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가$-2<x<5$이면
$a<0$, 해가 $-2<x<5$인 부등식은
$(x+2)(x-5)<0$
$x^2-3x-10<0$에 a를 곱하면
$ax^2-3ax-10a>0$ $(\because\ a<0)$
$\therefore\ b=-3a,\ c=-10a$를
$ax^2-bx+c-2b>0$에 대입
$\therefore\ ax^2+3ax-10a+6a>0$
$ax^2+3ax-4a>0$
(a로 나누면 $a<0$이므로)
$x^2+3x-4<0$, $(x-1)(x+4)<0$
$\therefore\ -4<x<1$

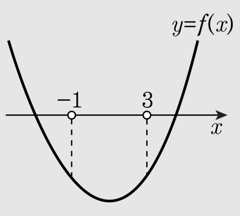
25. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0,\ f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0,\ k+3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0,\ 9k+3 \le 0$
$\therefore k \le -\dfrac{1}{3}$

(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3 이다.