

1. 다음 식을 간단히 하여라.

$$\frac{1-2i}{2+3i} + \frac{1+2i}{2-3i}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{8}{13}$

해설

(준식)

$$\begin{aligned} &= \frac{(1-2i)(2-3i) + (1+2i)(2+3i)}{(2+3i)(2-3i)} \\ &= \frac{(2-6) + (-4-3)i + (2-6) + (4+3)i}{2^2 + 3^2} \\ &= \frac{(-4-7i) + (-4+7i)}{13} \\ &= -\frac{8}{13} \end{aligned}$$

2. 복소수에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 찾으려면?

① $2 + i$ 의 허수 부분은 $2i$ 이다.

② $-5i$ 는 순허수이다.

③ i^3 은 허수이다.

④ $1 + \sqrt{3}i$ 의 켈레복소수는 $1 - \sqrt{3}i$ 이다.

⑤ $1 - \frac{1}{i}$ 는 실수이다.

해설

① $2 + i$ 의 허수부분 : i (×)

② $-5i$ 는 순허수 (○)

③ $i^3 = -i$ 허수 (○)

④ $\overline{1 + \sqrt{3}i} = 1 - \sqrt{3}i$ (○)

⑤ $1 - \frac{1}{i} = 1 + i$ 복소수 (×)

3. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = -\sqrt{12}$

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = -\sqrt{12}$

④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3} \times \sqrt{-4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4}i = -\sqrt{12}$

③ $\sqrt{-3} \times \sqrt{4} = \sqrt{3}i \times \sqrt{4} = \sqrt{12}i$

④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}i$

4. 이차방정식 $2x^2 - 4x + 5 = 0$ 의 두 근을 α 와 β 라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 의 값은?

① -7

② -3

③ 0

④ 3

⑤ 7

해설

$2x^2 - 4x + 5 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 2^3 - 3 \times \frac{5}{2} \times 2 \\ &= 8 - 15 = -7\end{aligned}$$

5. 다음 함수의 최댓값 및 최솟값을 구하여라.

$$y = x^2 - 2x - 3 \quad (0 \leq x \leq 4)$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 최댓값 5

▷ 정답 : 최솟값 -4

해설

먼저, 주어진 식을 $y = a(x - m)^2 + n$ 의 꼴로 변형하여 그래프를 그린 다음 주어진 구간 안에서 가장 높은 점과 가장 낮은 점을 조사한다.

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

꼭짓점 : $x = 1$ 일 때 $y = -4$

$$\text{양끝점 : } \begin{cases} x = 0 \text{ 일 때 } y = -3 \\ x = 4 \text{ 일 때 } y = 5 \end{cases}$$

$x = 4$ 에서 최댓값 5, $x = 1$ 에서 최솟값 -4

6. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$ 을 풀면?

① $x = -1$ (증근), $-\frac{1}{2}$, 2

② $x = -1$ (증근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (증근), $\frac{1}{2}$, 2

④ $x = -1, \frac{1}{2}, 2$ (증근)

⑤ $x = -1, \frac{1}{2}$ (증근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

-1	2	-1	-6	-1	2
	-2	3	3	-2	
	2	-3	-3	2	0
2		4	2	-2	
	2	1	-1	0	

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$$(x+1)(x-2)(2x^2+x-1) = 0$$

$$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1, \frac{1}{2}, 2$$

7. 연립방정식 $ax + by = 8$, $2ax - by = -2$ 의 근이 $x = 1$, $y = 2$ 일 때, a , b 의 값은?

① $a = -2$, $b = -3$

② $a = 3$, $b = 2$

③ $a = 2$, $b = -3$

④ $a = 2$, $b = 3$

⑤ $a = -3$, $b = -2$

해설

$$ax + by = 8, 2ax - by = -2$$

근이 $x = 1, y = 2$ 이므로

$$\begin{cases} a + 2b = 8 \\ 2a - 2b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 3$$

8. 다음 연립방정식의 해를 $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 10 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ 3x + y - 2z = 3 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ x - 2y + z = 5 & \cdots \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉢} \times 3$ 을 하면 $-x + 3y = -5 \cdots \cdots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \times 2$ 를 하면 $5x - 3y = 13 \cdots \cdots \textcircled{㉥}$

$\textcircled{㉤} + \textcircled{㉥}$ 을 하면 $4x = 8 \therefore x = 2$

$x = 2$ 를 $\textcircled{㉤}$ 에 대입하면 $-2 + 3y = -5 \therefore y = -1$

또, $x = 2$, $y = -1$ 을 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하면

$$2 - 2 \cdot (-1) + z = 5$$

$$\therefore z = 1$$

$$\therefore x = 2, y = -1, z = 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 4 + 1 + 1 = 6$$

9. $-1 < x \leq 2$, $1 < y \leq 3$ 일 때, $a < x - y < b$ 를 계산하여 $b - a$ 의 값을 구하면?

① -14

② 1

③ 3

④ 5

⑤ -5

해설

$-1 < x \leq 2$, $1 < y \leq 3$ 에서

$x - y$ 의 가장 작은 값은 $-1 - 3 = -4$

가장 큰 값은 $2 - 1 = 1$

$\therefore -4 < x - y < 1$ 이므로 $a = -4$, $b = 1$

$b - a = 1 + 4 = 5$

10. $2|x-1| + x - 4 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x < 1$ 일 때,

$$-2(x-1) + (x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2$$

ii) $x \geq 1$ 일 때,

$$2(x-1) + x - 4 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

따라서 구하는 해는 $x = -2$ 또는 $x = 2$ 이다.

11. 이차방정식 $x^2 + 2x + k - 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 정수 k 의 최대값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

서로 다른 두 실근을 갖으려면 판별식이 0보다 커야 한다.

$$D' = 1^2 - (k - 3) > 0$$

$$\therefore k < 4$$

$\therefore$ 최대값은 3 ($\because k$ 는 정수)

12. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, 상수 a 의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$ 이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = -3$

인수정리와 조립제법을 이용하면

$$(\text{좌변}) = (x + 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{의 근은 } 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore a = -3, \text{ 나머지 근은 } 1 \pm \sqrt{2}$$

13. 연립방정식
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 6 \\ z + x = 7 \end{cases}$$
 을 풀면?

① $x = 2, y = 3, z = 4$

② $x = 2, y = 3, z = -4$

③ $x = 2, y = 3, z = 5$

④ $x = 2, y = -3, z = 4$

⑤ $x = 3, y = 2, z = 4$

해설

주어진 식을 모두 더하면

$$2(x + y + z) = 18, \quad x + y + z = 9 \quad \cdots \textcircled{7}$$

다시 주어진 식에 ⑦을 각각 대입한다.

$$\Rightarrow x = 3, \quad y = 2, \quad z = 4$$

14. 부등식 $|x - 3| \geq 2$ 의 해로 다음 중 옳은 것은?

① $1 \leq x \leq 5$

② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$

③ $-1 \leq x \leq 5$

④ $x \leq -1$ 또는 $x \geq 5$

⑤ $-5 \leq x \leq -1$

해설

$|x - 3| \geq 2$ 에서 $x - 3 \geq 2$ 또는 $-(x - 3) \geq 2 \therefore x \geq 5$ 또는 $x \leq 1$

15. 모든 실수 x, y 에 대하여 $\sqrt{mx^2 - mx + 2}$ 가 0이 아닌 실수가 될 실수 m 의 값의 범위는?

① $0 < m < 4$

② $4 \leq m \leq 8$

③ $0 \leq m < 8$

④ $4 < m \leq 8$

⑤ $m \geq 8$

해설

$\sqrt{mx^2 - mx + 2}$ 가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2 - mx + 2 > 0$ 이어야 한다.

i) $m = 0$ 일 때 $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 > 0$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 항상 성립한다.

ii) $m \neq 0$ 일 때 $mx^2 - mx + 2 > 0$ 가
모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하려면
 $m > 0 \dots \textcircled{\Gamma}$

또 이차방정식 $mx^2 - mx + 2 = 0$ 의 판별식을
 D 라 할 때

$$D = (-m)^2 - 8m < 0, \quad m(m - 8) < 0$$

$$\therefore 0 < m < 8 \dots \textcircled{\Delta}$$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta}$ 의 공통 범위를 구하면 $0 < m < 8$

i), ii)에서 $0 \leq m < 8$

16. 부등식 $|x - 2| < k$ 를 만족하는 모든 x 의 값이 부등식 $|x^2 - 8| \leq 8$ 을 만족할 때, 실수 k 의 최댓값은? (단, $k > 0$)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

부등식 $|x^2 - 8| \leq 8$ 을 풀면

$$-8 \leq x^2 - 8 \leq 8$$

$$0 \leq x^2 \leq 16$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 4$$

$k > 0$ 이므로 부등식 $|x - 2| < k$ 을 풀면

$$-k < x - 2 < k$$

$$-k + 2 < x < k + 2$$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2 - 8| \leq 8$ 을 만족하려면

$$-k + 2 \geq -4, \quad k + 2 \leq 4 \text{ 이어야 하므로}$$

$$k \leq 6, \quad k \leq 2$$

$$\therefore 0 < k \leq 2$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 2이다.

17. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \leq x + 4 \\ x^2 - 4x - 5 < 0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 개

해설

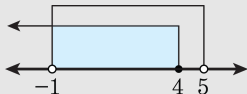
$$\textcircled{㉠} 2x \leq x + 4,$$

$$\therefore x \leq 4$$

$$\textcircled{㉡} x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 5$$



$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 범위의

공통범위는 $-1 < x \leq 4$

$\therefore x = 0, 1, 2, 3, 4$ 총 5 개

18. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ 의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

그런데 $x \geq 0$ 이므로 $x = 3$

ii) $x < 0$ 일 때

$$x^2 + 2x - 3 = 0, (x-1)(x+3) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = -3$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -3$

(i), (ii)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$

따라서 근의 합은 0이다.

19. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 α , $\alpha + 2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \dots\dots\textcircled{\text{㉠}} \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \dots\dots\textcircled{\text{㉡}} \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha = k - 1$ 을 ㉡에 대입하면,

$$(k - 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 3$$

$$\therefore k = -2$$

20. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면

$$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$$

$$(a - b)p + a - b = 0$$

$$(a - b)(p + 1) = 0$$

$$a \neq b \text{ 이므로 } p = -1$$

그런데 교점이 x 축 위에 있으므로

교점의 y 좌표는 0 이다.

$$\therefore 1 + a + b = 0$$

$$\therefore a + b = -1$$

21. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t \text{ 라 하면}$$

$x = 2t - 1, y = 5t + 3, z = 3t - 2$ 이므로

$$x^2 - y^2 + z^2 = (2t - 1)^2 - (5t + 3)^2 + (3t - 2)^2 = -12t^2 - 46t - 4 \\ \dots \textcircled{1}$$

$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 이므로

$$t \geq \frac{1}{2}, t \geq -\frac{3}{5}, t \geq \frac{2}{3}$$

$$\therefore t \geq \frac{2}{3}$$

이 범위에서 $\textcircled{1}$ 은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$$-12 \left(\frac{2}{3} \right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$$

22. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$x^2 - x + 1 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x^3 + 1 = 0$$

$$x^3 = -1$$

$$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$$

23. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,
 $\alpha + \beta$ 의 최솟값을 구하여라.

① -8

② -6

③ -4

④ -2

⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x - y)(x + 2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

1) $y = 2x$ 일 때

$$x^2 + 4x^2 = 5x^2 = 20$$

$$\therefore x = \pm 2, y = \pm 4$$

2) $x = -2y$ 일 때

$$4y^2 + y^2 = 5y^2 = 20$$

$$\therefore y = \pm 2, x = \mp 4$$

$$(x, y) = (2, 4), (-2, -4), (-4, 2), (4, -2)$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6, -6, -2, 2$$

그러므로 $\alpha + \beta$ 의 최솟값은 -6

24. $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 5$ 일 때, $ax^2 - bx + c - 2b > 0$ 의 해를 구하면?

① $x < -1, x > 4$

② $x < -4, x > 1$

③ $-1 < x < 4$

④ $-4 < x < 1$

⑤ $-4 < x < -1$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 5$ 이면

$a < 0$, 해가 $-2 < x < 5$ 인 부등식은

$$(x+2)(x-5) < 0$$

$x^2 - 3x - 10 < 0$ 에 a 를 곱하면

$$ax^2 - 3ax - 10a > 0 \quad (\because a < 0)$$

$$\therefore b = -3a, c = -10a \text{를}$$

$ax^2 - bx + c - 2b > 0$ 에 대입

$$\therefore ax^2 + 3ax - 10a + 6a > 0$$

$$ax^2 + 3ax - 4a > 0$$

(a 로 나누면 $a < 0$ 이므로)

$$x^2 + 3x - 4 < 0, (x-1)(x+4) < 0$$

$$\therefore -4 < x < 1$$

25. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2(k-1)x + 3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하여라.

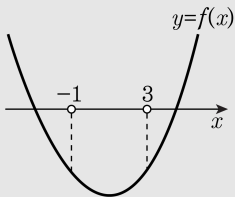
▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.

$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \leq 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \leq 0$, $k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -3$

(ii) $f(3) \leq 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \leq 0$, $9k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k \leq -3$

따라서, 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.