1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $i^2 = -1$

② $x^2 = -4$ 를 만족하는 실수는 존재하지 않는다.

③ $\sqrt{-9} = 3i$

④ 2는 복소수이다.

⑤ $a + bi$ 에서 $b = 0$ 이면 실수이다. (단, a, b 는 실수)

해설

④ $2 = 2 + 0 \cdot i$ 이므로 복소수이다.

2. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$ 을 $a + bi$ (a, b 는 실수) 형태로 나타내면?

① $2\sqrt{2} + 3i$ ② $-3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ③ $-2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}i$

④ $2\sqrt{3}i$ ⑤ $3\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{-3} \times \sqrt{-6} - \sqrt{8} \div \sqrt{-4}$

$= \sqrt{3}i \times \sqrt{6}i - \dfrac{2\sqrt{2}}{2i}$

$= -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

3. $\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}$ 의 값은?

① i　② $-i$　③ $-\dfrac{i}{2}$　④ $\dfrac{1-i}{2}$　⑤ $\dfrac{1+i}{2}$

해설

$$\frac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}=\frac{1+(-i)+(-1)}{1+(-1)+1}=\frac{-i}{1}=-i$$

4. $x = 1 + \sqrt{2}i, y = 1 - \sqrt{2}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ -2 ④ 2 ⑤ -3

해설

$x^2 = (1 + \sqrt{2}i)^2 = 1 + 2\sqrt{2}i - 2 = -1 + 2\sqrt{2}i$
$y^2 = (1 - \sqrt{2}i)^2 = 1 - 2\sqrt{2}i - 2 = -1 - 2\sqrt{2}i$
$\therefore\ x^2 + y^2 = -2$

해설

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times 3 = -2$

5. 다음 중 옳은 것은?

① $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=-\sqrt{12}$
② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{12}$
③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=-\sqrt{12}$
④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=-\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

해설

② $\sqrt{-3}\times\sqrt{-4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}i=-\sqrt{12}$
③ $\sqrt{-3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}i\times\sqrt{4}=\sqrt{12}i$
④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$
⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}i$

6. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 않은 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로
$D=(-3)^2+4\cdot 1\cdot(k-1)\geq 0$
$9+4k-4\geq 0,\ 4k\geq -5$
$\therefore\ k\geq -\frac{5}{4}$

7. $a < b$일 때, □안의 등호가 알맞은 것을 모두 고르면?

㉠ $a+2 \boxed{<} b+2$	㉡ $-a-4 \boxed{>} -b-4$
㉢ $\frac{1}{2}a+3 \boxed{>} \frac{1}{2}b+3$	㉣ $-\frac{a}{3} \boxed{<} -\frac{b}{3}$

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉡, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉢ 부등식의 양변에 양수를 곱하거나 같은 수를 더하더라도 부등호의 방향이 바뀌지 않으므로 $\frac{1}{2}a+3 < \frac{1}{2}b+3$

㉣ 부등식의 양변을 음수로 나누면 부등호의 방향이 바뀌므로 $-\frac{a}{3} > -\frac{b}{3}$

8. 정수 x의 값이 $-2 \le x \le 2$일 때, $2x+1$의 최댓값은?

① -3　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

$2x+1$은 x에 2를 곱하고 1을 더하여 얻은 값이다. 그러므로 x가 커지면 $2x+1$값도 커진다.
따라서 $x=2$일 때 $2x+1$값은 최대이고 그 값은 5이다.

해설

$-2 \le x \le 2 \;\Rightarrow\; -4 \le 2x \le 4$
$\Rightarrow\; -3 \le 2x+1 \le 5$
$\therefore$ 최댓값은 5

9. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-2x+1>0 \\ 2x^2-9x-18\le 0 \end{cases}$ 을 만족하는 정수해의 개수는?

① 7 개　② 8 개　③ 9 개　④ 10 개　⑤ 11 개

해설

$\begin{cases} x^2-2x+1>0 & \cdots ㈎ \\ 2x^2-9x-18\le 0 & \cdots ㈏ \end{cases}$

㈎에서 $(x-1)^2>0$

$\therefore x\ne 1$인 모든 실수

㈏에서 $(2x+3)(x-6)\le 0$

$\therefore -\dfrac{3}{2}\le x\le 6$

따라서 공통 범위를 구하면

$-\dfrac{3}{2}\le x\le 6, x\ne 1$

이 범위를 만족하는 정수는

$-1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이다.

10. x에 대한 이차방정식 $2mx^2+(5m+2)x+4m+1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값은?

① $-\frac{3}{2},\ -2$ ② $-\frac{7}{12},\ -\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{7}{2},\ 2$
④ $-\frac{2}{7},\ 2$ ⑤ $\frac{2}{7},\ \frac{3}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로
$D=(5m+2)^2-4\cdot 2m\cdot(4m+1)=0$
$25m^2+20m+4-32m^2-8m=0$
$7m^2-12m-4=0$
$(7m+2)(m-2)=0$
$\therefore m=-\frac{2}{7}$ 또는 2

11. 이차방정식 $3x^2+6x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값은?

① $\frac{7}{3}$　② $\frac{20}{3}$　③ 7　④ 20　⑤ -12

해설

$|\alpha-\beta| = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{60}}{3}$

$\therefore\ (\alpha-\beta)^2 = |\alpha-\beta|^2 = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$

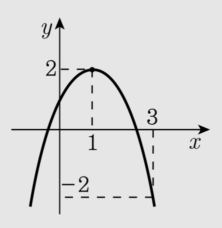
12. x의 범위가 $0 \le x \le 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$
이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.
$\therefore\ M + m = 2 + (-2) = 0$



13. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & 1 & 1 & -12 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로

$(x-1)(x^2 + x - 12) = 0$

$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = -4$또는 $x = 1$또는 $x = 3$

$\therefore\ -4 + 1 + 3 = 0$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ 를 만족하는 x, y, z를 구할 때, $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\begin{cases} x+y=1\cdots ㉠ \\ y+z=3\cdots ㉡ \\ z+x=4\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢ $\Rightarrow 2(x+y+z)=8$

$x+y+z=4\cdots$ ㉣

㉣ − ㉠ $\Rightarrow z=3$

㉣ − ㉡ $\Rightarrow x=1$

㉣ − ㉢ $\Rightarrow y=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=10$

15. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

16. 부등식 $|2x-a|>7$ 의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\frac{a-7}{2}$ 또는 $x>\frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\frac{a-7}{2}=-1$, $\frac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

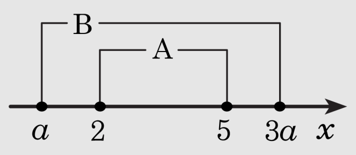
$\therefore a+b=11$

17. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$ ② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$ ③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$ ⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2 + 7x - 10 \geq 0$
$x^2 - 7x + 10 \leq 0$
$(x-2)(x-5) \leq 0$
$2 \leq x \leq 5$
$x^2 - 4ax + 3a^2 \leq 0$
$(x-a)(x-3a) \leq 0$
$a \leq x \leq 3a (\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

18. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3-2i,\ 3+2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2-i,\ 2+i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\frac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.
두 근의 곱 $=\frac{c}{a}=(3-2i)(3+2i)=9+4=13$
성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x의 계수는 참이다.
두 근의 합$=-\frac{b}{a}=2-i+2+i=4$
$\therefore \left|\frac{bc}{a^2}\right|=\left|\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}\right|=|-4\times 13|=|-52|=52$

19. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ 또는 $a > 1$ ② $a < -2$ 또는 $a > 2$

③ $1 < a < -1$ ④ $-2 < a < 2$

⑤ $a = -1$ 또는 $a = 1$

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가
x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로
이차방정식 $x^2 - ax + 1 = 0$ 에서
판별식의 값은 양이다.
즉 $D = a^2 - 4 > 0$
$\therefore\ a < -2$ 또는 $a > 2$

20. $x^2 + y^2 = 4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2y + x^2$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 = 4$에서 $x^2 = 4 - y^2$
x, y가 실수이므로
$x^2 = 4 - y^2 \geq 0,\ y^2 \leq 4$
$\therefore -2 \leq y \leq 2$
$2y + x^2$ 에 $x^2 = 4 - y^2$을 대입하면
$2y + x^2 = 2y + (4 - y^2)$
$= -y^2 + 2y + 4 = -(y-1)^2 + 5$
이 때, $-2 \leq y \leq 2$이므로 $y = 1$일 때
최댓값은 5, $y = -2$일 때 최솟값은 -4이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $5 + (-4) = 1$

21. 둘레의 길이가 $40\,\text{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대가 될 때, 반지름의 길이 및 최대 넓이 S 를 구하여라.

▶ 답: $\underline{\qquad\qquad\text{cm}^2}$

▷ 정답: $100\,\underline{\text{cm}^2}$

해설

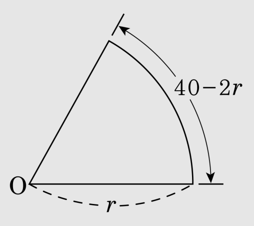
부채꼴의 반지름의 길이를 $r\text{cm}$ 라 하면

$S = \dfrac{1}{2} \times r \times (40-2r) = r(20-r)$

$\quad = -r^2 + 20r = -(r-10)^2 + 100$

한편 $r > 0$ 이고 $40 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 20$

따라서 $y = 10$ 일 때 최대 넓이는 100m^2 이다.



22. 다음은 삼차방정식 $x^3+px+1=0$의 한 근을 α라고 할 때, $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이고, $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$의 근임을 보인 과정이다. (가)~(마) 에 들어갈 말로 옳지 않은 것은?

> α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
> $f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=$ (가)$=$ (나) $=0$ ($\because$ ㉠)
> 따라서 $-\alpha$는 $x^3+px-1=0$의 근이다. 또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=$ (다)$=$ (라)$=$ (마) $=0$($\because$ ㉠)
> 따라서, $\frac{1}{\alpha}$은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

① (가) $(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
② (나) $-(\alpha^3-p\alpha+1)$
③ (다) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$
④ (라) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)$
⑤ (마) $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot 0$

해설

α는 $x^3+px+1=0$의 근이므로 $\alpha^3+p\alpha+1=0$ $\cdots$ ㉠
$f(x)=x^3+px-1$이라고 하면 $f(-\alpha)=(-\alpha)^3+p(-\alpha)-1$
$=-(\alpha^3+p\alpha+1)=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $-\alpha$ 는 $x^3+px-1=0$의 근이다.
또 $g(x)=x^3+px^2+1$ 이라고 하면 $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+p\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+1$
$=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3(1+p\alpha+\alpha^3)=\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3\cdot\ 0=0$ ($\because$ ㉠)
따라서 $\frac{1}{\alpha}$ 은 $x^3+px^2+1=0$ 의 근이다.

23. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x,\ y$ 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t+4)=0$ 에서
$t=1$ 또는 $t=-4$
따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

24. 이차방정식 $2x^2-5x+k=0$ 의 근이 유리수가 되는 k의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식D ≥ 0 이어야 한다.

$D=25-8k \geq 0$ 곧, $k \leq \dfrac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k=3,\ 2,\ 1,\ \cdots$ 이고,
이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k=3$ 이다.

25. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하도록 k의 범위를 구하면 $m<k<n$이다. 이 때, m^2+n^2의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 13

해설

$x^2+2kx-k+6>0$이 항상 성립하려면
판별식 $D<0$이다.
$\frac{D}{4}=k^2-(-k+6)<0$
$k^2+k-6<0$, $(k+3)(k-2)<0$
$-3<k<2$
$\therefore m=-3$, $n=2$
$\therefore$ $m^2+n^2=(-3)^2+2^2=13$