1. 평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+b)$ 에 의하여 점$(3,\ 5)$ 가 점$(8,\ 20)$ 으로 이동했다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

점$(3,\ 5)$ 가 점$(8,\ 20)$ 으로 이동하려면 x축 방향으로 $+5$, y축 방향으로 $+15$만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a=5,\ b=15$

2. 평행이동 $(x,\ y) \to (x+2,\ y-3)$ 에 의하여 직선 $x+ay+b=0$ 이 직선 $x-2y+10=0$ 으로 옮겨졌다고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 12　　② 14　　③ 16　　④ 18　　⑤ 20

해설

평행이동 $(x,\ y) \to (x+2,\ y-3)$ 에 의하여
직선 $x+ay+b=0$ 은
$(x-2)+a(y+3)+b=0$ 으로 옮겨진다.
이 식을 정리하면 $x+ay+3a+b-2=0$ 이다.
이 식은 $x-2y+10=0$ 과 같은 식이므로
계수를 비교하면 $a=-2,\ 3a+b-2=10$
$\therefore\ a=-2,\ b=18 \quad \therefore\ a+b=16$

3. 원 $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ 이 평행이동 $(x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 원 $x^2+y^2-2x-4y+r=0$ 으로 옮겨질 때, $m+n+r$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원 $x^2+y^2+2x+6y+1=0$ 에서
$(x+1)^2+(y+3)^2=9$ 이므로
이 원의 중심은 $(-1,-3)$ 이고 반지름의 길이는 3 이다.
한편, 원 $x^2+y^2-2x-4y+r=0$ 에서
$(x-1)^2+(y-2)^2=5-r$ 이므로
이 원의 중심은 $(1,2)$ 이고
반지름의 길이는 $\sqrt{5-r}$ 이다.
이때, 주어진 평행이동
$(x,y) \to (x+m, y+n)$ 에 의하여
처음 원의 중심 $(-1,-3)$ 은
옮겨진 원의 중심 $(1,2)$ 로 옮겨지므로
$(-1+m,-3+n)=(1,2)$
따라서, $-1+m=1$ 에서 $m=2$
$-3+n=2$ 에서 $n=5$
또한, 평행이동에 의하여 옮겨진 원의 크기는
변하지 않으므로 옮기기 전과 옮긴 후의
원의 반지름의 길이가 같다.
따라서, $\sqrt{5-r}=3$ 에서 $5-r=9$
$\therefore r=-4$
$\therefore m+n+r=2+5-4=3$

4. 평행이동 $f:(x,\ y)\ \rightarrow\ (x-a^2,\ y-a)$ 에 의하여 직선 $3x+2y=1$ 이 직선 $3x+2y=0$ 으로 이동되었다. 이때, 양수 a 의 값은?

① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{1}{2}$　　③ $\frac{2}{3}$　　④ 1　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

직선 $3x+2y=1$ 의 $x,\ y$ 에 각각
$x-(-a^2)=x+a^2,\ y-(-a)=y+a$ 를 대입하면
$3(x+a^2)+2(y+a)=1$
$3x+2y=1-2a-3a^2$
$\therefore\ 1-2a-3a^2=0$
$(3a-1)(a+1)=0$
$\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because\ a>0)$

5. 직선 $y = ax + b$ 를 평행이동 $f : (x, y) \to (x-1, y+2)$ 에 의하여 옮겼더니 직선 $y = 2x + 3$ 과 y축 위에서 직교할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$y = ax + b$ 의 x , y 대신에 각각 $x+1$, $y-2$ 를 대입하면

$y - 2 = a(x+1) + b$

$\therefore y = ax + a + b + 2$

이 직선과 직선 $y = 2x + 3$ 이 y 축 위에서 직교하므로

두 직선의 기울기의 곱은 -1 이고, $(0, 3)$ 을 지난다.

$a \times 2 = -1$, $a + b + 2 = 3$

연립하여 풀면

$a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$

$\therefore a - b = -2$

6. 원 $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 과 겹칠 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 25　　② 32　　③ 34　　④ 41　　⑤ 50

해설

$x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$ 에서
$(x+2)^2 + (y+3)^2 = 1 \cdots$ ㉠
$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ 에서
$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \cdots$ ㉡
㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$(x-a+2)^2 + (y-b+3)^2 = 1$
이 원이 ㉡과 겹쳐지므로
$-a+2 = -1$, $-b+3 = -2$
$\therefore a = 3$, $b = 5$
$\therefore a^2 + b^2 = 34$

7. 직선 $3x+4y-5=0$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3 만큼 평행 이동시켰을 때, 이 직선의 y절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하므로 $3(x-2)+4(y+3)-5=0$으로 이동한다.

이 직선의 y절편은 $x=0$을 대입하면 $y=-\frac{1}{4}$

8. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$에 의하여 점 $(1, 2)$는 점 $(-1, 3)$으로 옮겨진다. 이 때, 평행이동 f에 의하여 원 $x^2+y^2+2x-2y+1=0$이 옮겨진 원의 중심의 좌표는?

① $(1, -2)$　② $(-3, 2)$　③ $(2, -1)$
④ $(-1, 2)$　⑤ $(2, -3)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 -2,
y축의 방향으로 $+1$만큼
평행이동 하는 변환이다.
$x^2+y^2+2x-2y+1=0$의 중심은
$(-1, 1)$이므로 평행이동 f에 의하여
$(-1-2, 1+1)=(-3, 2)$로 이동한다.

9. 점 $(x,\ y)$가 점 $(x+a,\ y+b)$로 옮겨지는 평행이동에 의하여 $x^2+y^2-6x+4y-36=0$이 원 $x^2+y^2=r^2$으로 옮겨질 때, $a+b+r$의 값은? (단, $r>0$)

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

주어진 원 $x^2+y^2-6x+4y-36=0$은
중심이 $(3,\ -2)$이고, 반지름이 7인 원이다.
그 원이 중심이 $(0,\ 0)$, 반지름이 r인 원으로 이동했으므로
x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $+2$ 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 $a=-3,\ b=2,\ r=7$

10. 원 $x^2+y^2+2x-2y-6=0$을 x축 방향으로 p만큼, y축방향으로 q만큼 평행이동시키면 원 $x^2+y^2-2x+6y+c=0$이 된다. 이 때, $pq+c$의 값은?

① -2　② -4　③ -6　④ -8　⑤ -10

해설

원을 평행이동시키면 반지름의 길이는 변하지 않고, 중심좌표만 변한다.

$x^2+y^2+2x-2y-6=0$

$\Rightarrow\ (x+1)^2+(y-1)^2=8$

$x^2+y^2-2x+6y+c=0$

$\Rightarrow\ (x-1)^2+(y+3)^2=10-c$

$\therefore\ (-1,\ 1)\to(1,\ -3)$이므로, x축으로 2만큼, y축으로 -4만큼 평행이동한 것이고, $8=10-c$에서 $c=2$이다.

$\therefore\ pq+c=2\cdot(-4)+2=-6$

11. 점 $(a,\ b)$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 의 중심과 일치하였다. 이때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

점 $(a,\ b)$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 점의 좌표는
$(a+1, b-2)$
이때, 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서
$(x+2)^2+(y-2)^2=4$ 이므로
이 원의 중심은 $(-2, 2)$ 이다.
점 $(a+1, b-2)$ 와 점 $(-2, 2)$ 가 일치하므로
$a+1=-2, b-2=2$ 에서
$a=-3,\ \ b=4 \quad \therefore a+b=1$

12. 직선 $x-2y+3=0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하였더니 처음 직선과 일치하였다. 이때, $\frac{2mn}{m^2+n^2}$ 의 값은? (단, $mn \neq 0$)

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{6}{7}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

해설

직선 $x-2y+3=0$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼,
y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$(x-m)-2(y-n)+3=0$
즉, $x-2y-m+2n+3=0$
이것이 직선 $x-2y+3=0$ 과 일치하므로
$-m+2n+3=3$ 에서 $m=2n$
$\therefore \frac{2mn}{m^2+n^2}=\frac{4n^2}{4n^2+n^2}=\frac{4n^2}{5n^2}=\frac{4}{5}$

13. 원 $x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면 점 $(1, 0)$ 을 지난다고 한다. 이 때, 점 (a, b) 가 나타내는 도형의 길이를 구하면?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ 2π ④ 4π ⑤ $\frac{7}{3}\pi$

해설

$x^2+y^2-2x+4y+4=0$ 을 표준형으로 나타내면
$(x-1)^2+(y+2)^2=1$
이 원을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$(x-a-1)^2+(y-b+2)^2=1$
이 원이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로
$(-a)^2+(-b+2)^2=1$
$\therefore a^2+(b-2)^2=1$
따라서, 점 (a, b) 가 나타내는 도형은
중심이 $(0, 2)$, 반지름의 길이가 1 인 원이므로
구하는 도형의 길이는 2π 이다.

14. 점 $(2,\ -1)$ 을 y 축에 대하여 대칭이동한 다음 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $(2,\ -1)$　　② $(-1,\ -2)$　　③ $(1,\ 2)$

④ $(-2,\ 4)$　　⑤ $(-1,\ 3)$

해설

점 $(2,\ -1)$ 을 y 축에 대하여
대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -1)$
이 점을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
구하는 점의 좌표는 $(-1,\ -2)$

15. 직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 y 절편이 -3 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

직선 $y = 2x + k$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-y = -2x + k$, 즉 $y = 2x - k$
이 때, 이 직선의 y 절편이 -3 이 되어야 하므로
$-k = -3$
$\therefore k = 3$

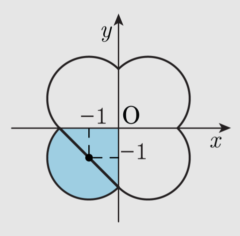
16. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$의 제 3사분면에 있는 부분과 이 부분을 각각 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동해서 생기는 모든 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\pi+2$　　② $2\pi+4$　　③ $2\pi+8$

④ $4\pi+8$　　⑤ $8\pi+8$

해설

원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$는 다음 그림과 같으므로



어두운 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\pi\times\sqrt{2}^2+\frac{1}{2}\times2\times2=\pi+2$

따라서 구하는 넓이는 어두운 부분의 넓이의 4배와 같으므로

$4(\pi+2)=4\pi+8$

17. $y = x + 3$을 x축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 원점에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $y = -x + 3$ ② $y = x - 3$ ③ $y = -x - 3$
④ $y = 3x + 1$ ⑤ $y = 3x + 3$

해설
x축대칭은 y의 부호를 반대로, 원점대칭은 x , y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.

18. 좌표평면 위의 점 $(a,\ b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 제 4 사분면의 점이 되었다.
점 $\left(\frac{a}{b},\ a+b\right)$ 는 제 몇 사분면에 존재하는가?

① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면
③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면
⑤ x 축 위의 점이다.

해설

점 $(a,\ b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 $(a,\ -b)$ 이고,
이 점을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 $(-b,\ a)$ 이다.
즉, 점 $(-b,\ a)$가 제4 사분면의 점이므로
$-b>0,\ a<0 \quad \therefore\ a<0,\ b<0$
따라서 $\frac{a}{b}>0,\ a+b<0$ 이므로 점 $\left(\frac{a}{b},\ a+b\right)$ 는
제4사분면에 존재한다.

19. 좌표평면 위에서 원 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 중심거리는?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ 3 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$를
직선 $y=x$에 대하여
대칭이동 시킨 원의 방정식은
$(x-3)^2+(y-1)^2=4$ 이고,
이 원의 중심은 $(3,1)$이다.
두 원의 중심거리는
두 점 $(1,3), (3,1)$ 사이의 거리와 같으므로
$\sqrt{(1-3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{2}$

20. 직선 $y=-4x+7$을 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선을 l_1, 원점에 대하여 대칭이동한 직선을 l_2라고 할 때, 두 직선 l_1, l_2 의 기울기의 곱은?

① -1　　② $-\frac{1}{16}$　　③ $\frac{1}{16}$　　④ 1　　⑤ 16

해설

$l_1 : y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$, $l_2 : y=-4x-7$

l_1 의 기울기 : $-\frac{1}{4}$, l_2 의 기울기 : -4

$\therefore$ 두 직선 l_1, l_2 의 기울기의 곱은 $-\frac{1}{4}\times -4=1$ 이다.

21. 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m-n$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$,
즉 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$을
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1+m,\ 2+n)$이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
이때 두 원이 직선 $y=x$에 대칭이므로
$(-1+m,\ 2+n)=(2,\ -1)$
$m=3,\ n=-3$이므로 $2m-n=9$

22. 포물선 $y = x^2 - 2x$ 를 $f\ :\ (x,\ y) \to (x-a,\ y-1)$ 에 의하여 평행이동한 곡선과 직선 $y = 2x$ 와의 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = x^2 - 2x$ 를 주어진 조건에 의하여
평행이동하면 $(y+1) = (x+a)^2 - 2(x+a)$
$y = x^2 + (2a-2)x + a^2 - 2a - 1$
이 곡선이 직선 $y = 2x$ 와 접하므로
y 에 $2x$ 를 대입하여 정리하면
$x^2 + (2a-4)x + a^2 - 2a - 1 = 0$ 이고
이 방정식의 두 근이 두 교점이 된다.
두 교점의 x좌표를 $x_1,\ x_2$ 라 하면
$x_1 + x_2 = -(2a-4)$
$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-(2a-4)}{2} = 0$ 이므로 a 의 값은 2

23. 직선 l 을 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 다음 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선과 일치하였다. 이때, 직선 l 의 방정식은?

① $y = \frac{1}{2}x - 8$　　② $y = \frac{1}{2}x - 4$　　③ $y = 2x + \frac{1}{2}$

④ $y = 2x - 4$　　⑤ $y = 2x - 8$

해설

직선 l 의 방정식을 $y = ax + b\,(a \neq 0)$ 로 놓자.
이때, 이것을 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한
직선의 방정식은 $y = ax + b + 3$
다시 이것을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한
직선의 방정식은 $x = ay + b + 3$
즉, $x - ay - b - 3 = 0 \cdots\cdots$ ㉠
한편, 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 $(-1, 2)$ 에서의
접선의 방정식은 $y = \frac{1}{2}(x + 1) + 2$
즉, $x - 2y + 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠과 ㉡이 일치하므로 계수를 비교하면
$a = 2, -b - 3 = 5$
$\therefore a = 2, b = -8$
따라서, 구하는 직선 l 의 방정식은 $y = 2x - 8$

24. 점 $(a-4, a-2)$ 를 x 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 다음, $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 원점 사이의 거리가 2일 때, 처음 점의 좌표를 (p, q) 라 한다. p^2+q^2 의 값을 구하여라. (단, $a \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(a-4, a-2) \rightarrow (a, a-2)$
(x 축으로 4만큼 평행이동)
$(a, a-2) \rightarrow (a-2, a)$
($y=x$ 에 대칭이동)
$(a-2, a)$ 와 원점 사이의 거리는
$\sqrt{(a-2)^2+a^2}=2$
$2a^2-4a+4=4,$
$\therefore a=2 \ \ (\because a \neq 0)$
처음 점의 좌표 $(a-4, a-2)$ 에 $a=2$ 를 대입하면
구하는 점의 좌표 $(p,\ q)=(-2,\ 0)$
$\therefore p^2+q^2=4$

25. 직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를 이등분하였다. 이때, a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ $\sqrt{5}$　　④ 3　　⑤ $2\sqrt{5}$

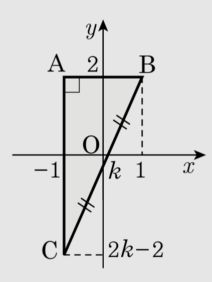
해설

직선 $2x-3y-1=0$ 을 원점에 대하여
대칭이동하면 $-2x+3y-1=0$
이 직선을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$-2y+3x-1=0$
$\therefore 3x-2y-1=0$
이 직선이 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=5$ 의 넓이를
이등분하므로 원의 중심 $(1, a)$ 를 지난다.
즉, $3-2a-1=0, 2a=2$　$\therefore a=1$

26. 점 A $(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B , 점 B 를 점 $(0, k)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라고 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이다. 이 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설



점 A $(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여
대칭이동한 점 B $(1, 2)$ 이고,
점 C (x, y) 라고 하면
$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점이 $(0, k)$ 이므로

$\frac{1+x}{2} = 0, \ \frac{2+y}{2} = k$

$\therefore x = -1, \ y = 2k-2$

$\therefore$ C $(-1, \ 2k-2)$

이 때, 삼각형 ABC 는 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형이고
$\overline{\mathrm{AB}} = 1-(-1) = 2, \overline{\mathrm{AC}} = |2k-4|$ 이므로
삼각형 ABC 의 넓이는

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |2k-4| = |2k-4|$

그런데 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이므로

$|2k-4| = 6$

$2k-4 = 6$ 또는 $2k-4 = -6$

$\therefore k = 5$ 또는 $k = -1$

따라서, 모든 실수 k 의 값의 합은 4 이다.

27. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 점 $(0, 1)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식이 $f(x, y) = 0$ 일 때, $f(x-a,\ y-b) = 0$ 은 x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 된다. 이 때, $a+b$ 의 값을 모두 구하면?

① 0, 2, 4 ② 1, 4, 5 ③ −2, 2, −6

④ 4, 5, 6 ⑤ −1, 3, 4

해설

원 $x^2 + y^2 = 4$ 를 점 $(0, 1)$ 에 대하여
대칭이동한 원의 방정식은
$x^2 + (y-2)^2 = 4$ 이다.
이 원을 x 축으로 a 만큼,
y 축으로 b 만큼 이동시킨 도형이
x 축, y 축에 동시에 접하는 원이 되므로,

$\begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$

또는 $\begin{cases} a = 2 \\ b = -4 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$

따라서 $a+b = 2$ 또는 -2 또는 -6

28. 원 $(x-3)^2+y^2=4$ 를 $y=x$ 에 대해 대칭이동한 원의 중심이 직선 $y=2x+k$ 위에 있을 때, k 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중심 $(3,0)$ 을 $y=x$ 에 대칭이동 시키면
$(0,3)$ 이 된다
$\therefore\ \ 3=2\times0+k$
$\therefore\ k=3$

29. 포물선 $y = x^2$ 을 점 P 에 대하여 대칭이동 시켰더니 포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 가 되었다. 이 때 점 P 의 좌표는?

① (1, 1)　　② (1, 2)　　③ (−1, 1)
④ (−1, −1)　　⑤ (1, −1)

해설

두 포물선이 한 점에 대하여 서로 대칭이면
두 포물선의 꼭지점도 이 점에 대하여 서로 대칭이다.
포물선 $y = x^2$ 의 꼭지점의 좌표는 O(0, 0) 이고
포물선 $y = -x^2 + 4x - 2$ 의 꼭지점의 좌표는 A(2, 2) 이다.
이 때, 점 P 는 선분 OA 의 중점이므로 P 의 좌표는 P(1, 1) 이다.

30. 점 $(1,-2)$ 를 지나는 직선을 점 $(2,\ 3)$ 에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동 하였더니 점 $(4,-4)$ 를 지난다고 한다. 처음 직선의 방정식을 구하면?

① $y=-4x+2$ ② $y=4x+2$ ③ $y=-4x+4$

④ $y=4x+4$ ⑤ $y=-4x+6$

해설

$(1,-2)$ 를 지나는 직선의 방정식을
$y+2=m(x-1)\cdots$①이라 하면
①식을 점 $(2,3)$ 에 대칭이동하면 (중점공식이용)
$x\to 4-x\ y\to 6-y$이므로
$6-y+2=m(4-x-1),\ y=m(x-3)+8\cdots$②
직선 ②를 x축에 대칭이동하면
$-y=m(x-3)+8\quad\cdots$③
직선 ③이 점 $(4,-4)$ 를 지나므로
$4=m(4-3)+8\ \therefore m=-4$
따라서 처음 직선의 방정식 ①은
$y+2=-4(x-1),\ y=-4x+2$

31. 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=9$ 을 점 $(4,\ 2)$ 에 대하여 대칭이동한 원의 중심은?

① $(4,\ 2)$　② $(9,\ 3)$　③ $(5,\ 1)$
④ $(3,\ 3)$　⑤ $(8,\ 4)$

해설

중심을 대칭이동했다고 보면 된다.
구하려는 중심을 $(a,\ b)$ 라 하면
$(x+1)^2+(y-1)^2=9$ 의 중심$(-1,\ 1)$ 과 구하려는 중심 $(a,\ b)$ 의 중점은 $(4,\ 2)$
따라서 두 중심의 중점인
$\left(\frac{a-1}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)=(4,\ 2)$
$\therefore a=9,\ b=3$

32. 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 점 $(3,\ 0)$ 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① $(1,\ 2)$ ② $(-1,\ 2)$ ③ $(1,-2)$
④ $(2,-1)$ ⑤ $(-2,\ 1)$

해설

구하는 좌표를 (a, b) 로 놓는다.
점 (a, b) 는 점$(3,\ 0)$ 과 직선 $2x-y-1=0$ 에 대하여 대칭이고, 이 때 점 $(3, 0)$과 점 (a, b) 를 연결하는 선분에서 $2x-y-1=0$ 와 수직으로 만나므로
중점 M 의 좌표는 $M\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b}{2}\right)$
$2\times\frac{a+3}{2}-\frac{b}{2}-1=0$
$2a+6-b-2=0$
$2a-b+4=0\ \ \cdots\cdots$(가)
기울기는 $\frac{b}{a-3}\times 2=-1$ 이므로
$a=-2b+3$
이것을 (가) 에 대입하면
$2(-2b+3)-b+4=0\quad \therefore\ a=-1,\ b=2$

33. $(3,\ 1)$ 의 직선 $y=2x+3$ 에 대한 대칭점을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 는?

① $\frac{4}{5}$　② 1　③ $\frac{6}{5}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ 2

해설

점 $(a,\ b)$와 $(3,\ 1)$을 지나는 직선은 직선 $y=2x+3$와 수직이다.

이 직선은 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 로 나타낼 수 있다.

점 $(a,\ b)$는 이 직선 위의 점이므로

$\left(a, -\frac{1}{2}a+\frac{5}{2}\right)$ 와 같다.

$\left(a, -\frac{1}{2}a+\frac{5}{2}\right)$ 는 직선 $y=2x+3$ 과의 거리가

점 $(3, 1)$ 과 직선 $y=2x+3$ 과의 거리와 같으므로
점과 직선 사이의 거리에서

$$\frac{|2\cdot 3+3-1|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|2a+3+\frac{1}{2}a-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{5}}$$

$|5a+1|=16$

$\therefore\ a=3$ 또는 $-\frac{17}{5}$

$(3,\ 1)$의 대칭점이 $(a,\ b)$이므로 $a\neq 3$,

$a=-\frac{17}{5}$ 일 때, $b=\frac{21}{5}$

$\therefore\ a+b=\frac{4}{5}$

34. 점 $(1,\ 2)$ 를 직선 $y=2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라고 할 때, 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $5(a+b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의 중점은

$\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$\frac{2+b}{2}=2\cdot\frac{1+a}{2}+1$

$\therefore 2a-b=-2 \quad \cdots\cdots\cdots㉠$

또한, 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$ 를 지나는 직선이

직선 $y=2x+1$ 과 수직이므로

$\frac{b-2}{a-1}=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a+2b=5 \quad \cdots\cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{5},\ b=\frac{12}{5}$

따라서, $5(a+b)=5\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{12}{5}\right)=5\cdot\frac{13}{5}=13$

35. 직선 $y = -2x + 4$ 에 대하여 원 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$ 과 대칭인 도형의 방정식을 구하면?

① $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 5$　　② $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 5$

③ $(x+5)^2 + (y-1)^2 = 5$　　④ $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 5$

⑤ $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 25$

해설

원의 직선에 대칭이동 되면 반지름은 변하지 않고
원의 중심만 대칭이동 된다.
$y = -2x + 4$ 에 대칭이동 된 원의 중심을
(x', y') 라 하면
$i)$ (x', y')와$(1, -3)$ 의 중점은
$y = -2x + 4$ 위에 있다

$$\Rightarrow \frac{y' - 3}{2} = -2\left(\frac{x' + 1}{2}\right) + 4$$

$\Rightarrow y' = -2x' + 9 \quad \cdots$ ㉠

$ii)$ (x', y')와$(1, -3)$ 을 잇는 선분의
기울기는 $y = -2x + 4$ 와 수직이다.

$$\Rightarrow \left(\frac{-3 - y'}{1 - x'}\right) \times (-2) = -1$$

$\Rightarrow x' = 2y' + 7 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면, $(x', y') = (5, -1)$

$\therefore$ 원의 방정식은 $(x-5)^2 + (y+1)^2 = 5$

36. 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 2$ 에 관하여 대칭이동한 식에서 중심의 좌표는?

① $(1, 1)$　② $(1, 2)$　③ $(2, 1)$　④ $(2, 2)$　⑤ $(2, 3)$

해설

원 중심 $\mathrm{O}(0, 0)$ 을 $y = -x + 2$ 에 대해
대칭이동 하면 된다. 대칭 이동점을
$\mathrm{O}'(a, b)$ 라 하면, $\overline{\mathrm{OO}'}$ 은
$y = -x + 2$ 에 수직하고, $\overline{\mathrm{OO}'}$ 의 중점은
$y = -x + 2$ 위에 있다.

$\Rightarrow \quad \frac{b}{a} = 1 \quad \cdots$①,

$\frac{b}{2} = -\frac{a}{2} + 2 \quad \cdots$ ②

①,②를 연립하면, $a = 2,\ b = 2$

$\therefore$ 중심좌표 : $(2,\ 2)$

37. P $(3, 1)$을 직선 $x+y+1=0$에 대하여 대칭이동한 점을 Q (α, β)라 할 때 $\alpha+\beta$의 값은?

① 1　　② -2　　③ -4　　④ -6　　⑤ -8

해설

직선 PQ 가 $x+y+1=0$ 에 수직이므로
기울기는 1 이다.
$\dfrac{\beta-1}{\alpha-3}=1 \cdots ㉠$
점 P, Q 의 중점 $\left(\dfrac{\alpha+3}{2}, \dfrac{\beta+1}{2}\right)$ 이 직선
$x+y+1=0$ 위 에 있으므로
$\dfrac{\alpha+3}{2}+\dfrac{\beta+1}{2}+1=0 \cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $\beta=-4$
따라서 $\alpha+\beta=-6$ 이다.

38. 점 $(2,\ 1)$ 을 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점을 (a,b) 라 할 때, $50ab$ 의 값을 구하면?

① 112 ② 128 ③ 144 ④ 156 ⑤ 160

해설

i) $(2,1)$과(a,b) 의 중점은 $y=\frac{1}{2}x+1$ 위에 있다.

$\Rightarrow \quad \frac{1+b}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+2}{2}\right)+1$

$\Rightarrow \quad a-2b+4=0$

i) $(2,1)$과(a,b) 를 잇는 선분의 기울기는 -2 이다

$\Rightarrow \quad \frac{b-1}{a-2}=-2$

$\Rightarrow \quad 2a+b-5=0$

ii) 과 ii) 를 연립하면, $a=\frac{6}{5}\ \ b=\frac{13}{5}$

$\therefore \quad 50ab=156$

39. 점 A(2, 3) 을 직선 $y = x - 1$ 에 의해 대칭 이동한 점의 좌표는?

① (3, −2) ② (3, 2) ③ (1, 4)
④ (4, 2) ⑤ (4, 1)

해설

대칭이동 된 점의 좌표를 $A' = (X, Y)$ 라 하면,
$\overrightarrow{AA'}$ 은 $y = x - 1$ 에 수직하고 AA' 의 중점은 $y = x - 1$ 위에 있다.
$\Rightarrow \dfrac{Y-3}{X-2} = -1, \ \dfrac{Y+3}{2} = \dfrac{X+2}{2} - 1$
두 식을 연립하면, $X = 4, \ Y = 1$
$\therefore \ A' = (4, 1)$

40. 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 점 A(3, 4) 와 대칭인 점의 좌표를 (x', y') 이라 할 때, $x'+y'$ 을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y=x+2$ 이므로 A(3, 4) 를 직선에 대해
대칭시킨 점을 (x', y') 라 하면,
$x'=y-2 \quad y'=x+2, \ (x, y)=(3, 4)$ 이므로
$x'=2 \ y'=5$, $\therefore \ x'+y'=7$

41. 두 점 $A(3,4), B(2,5)$ 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ -1　　④ 3　　⑤ 0

해설

중점이 $y = ax + b$ 위의 점이므로,

$\frac{9}{2} = a \cdot \frac{5}{2} + b \rightarrow 5a + 2b = 9$

선분AB 와 $y = ax + b$ 는 서로 수직이므로,

선분AB 의 기울기 : $\frac{4-5}{3-2} = -1$

따라서, $a = 1$

$5 \cdot 1 + 2b = 9$

$\therefore\ 2b = 4 \quad \therefore\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 1 + 2 = 3$

42. 점 $(2,\ 1)$ 에 대하여 점 $(a,\ b)$ 와 대칭인 점의 좌표를$(\alpha,\ \beta)$ 라 한다. 점 $(a,\ b)$ 가 직선 $y=2x+1$ 위를 움직이면 점 $(\alpha,\ \beta)$ 가 움직이는 도형은?

① $y=x-7$　② $y=x+7$　③ $y=2x+7$
④ $y=2x-7$　⑤ $y=3x+7$

해설

점 $(2,\ 1)$ 에 대하여 점 $(a,\ b)$ 와 대칭인
점이 $(\alpha,\ \beta)$ 이므로 $\frac{a+\alpha}{2}=2$
$\therefore\ a=4-\alpha$
$\frac{b+\beta}{2}=1$
$\therefore\ b=2-\beta$
한편 점 $(a,\ b)$ 가
직선 $y=2x+1$ 위를 움직이므로
$b=2a+1$ 이고 $a=4-\alpha$ $b=2-\beta$ 를 대입하여 정리하면
$\beta=2\alpha-7$
$\therefore\ y=2x-7$

43. 원 $(x+2)^2+(y-4)^2=1$를 직선 $y=mx+n$에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2=r^2$이 된다. 이때, $m+n+r$의 값을 구하면? (단, $r>0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

직선에 대한 대칭이동은 중점 조건과 수직 조건을 이용한다.
두 원 $(x+2)^2+(y-4)^2=1$, $x^2+y^2=r^2$의 중심이
각각 $(-2,\ 4)$, $(0,\ 0)$이므로 두 점을 이은 선분의 중점 $(-1,\ 2)$가
직선 $y=mx+n$ 위의 점인 조건에서
$2=-m+n \cdots\cdots$ ㉠
또, 두 점 $(-2,\ 4)$, $(0,\ 0)$을 지나는 직선과 직선 $y=mx+n$이 수직인 조건에서
$\frac{-4}{2}\times m=-1$
$\therefore m=\frac{1}{2}$
$m=\frac{1}{2}$ 을 ㉠에 대입하면 $n=\frac{5}{2}$
$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$
원을 대칭이동할 때 원의 중심은 이동하지만
원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $r=1$
따라서 $m+n+r=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+1=4$

44. 점$(3,\ 4)$를 직선 $x-y+2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 구하면?

① $(1,\ 5)$ ② $(2,\ 5)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(4,\ 5)$ ⑤ $(6,\ 5)$

해설

구하려는 점을 $(a,\ b)$라 하면, $(3,\ 4)$와 $(a,\ b)$의 중점은 $x-y+2=0$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $x-y+2=0$은 수직이다.

따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+4}{2}\right)$를 $x-y+2=0$에 대입하면

$a-b=-3\cdots$①

수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로 $x-y+2=0$의 기울기가 1일때 두점을 지나는 기울기는 -1이다.

$\frac{b-4}{a-3}=-1$, $a+b=7\cdots$②

따라서 ①, ②를 연립하면 $a=2, b=5$

45. 직선 $y = 2x - 1$에 대하여 점 $(3,\ 0)$의 대칭인 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $b - a$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

구하려는 점을 $(a,\ b)$라 하면, $(3,\ 0)$과 $(a,\ b)$의 중점은 $y = 2x - 1$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $y = 2x - 1$은 수직이다.

따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+0}{2}\right)$을

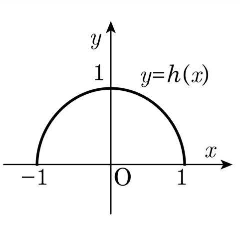
$y = 2x - 1$에 대입하면 $2a - b = -4 \cdots$①

$y = 2x - 1$의 기울기가 2이므로 두 점을 지나는 기울기는

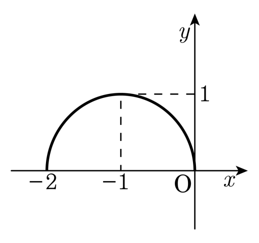
$\frac{b-0}{a-3} = -\frac{1}{2}$, $a + 2b = 3 \cdots$②

따라서 ①, ②를 연립하면 $a = -1,\ b = 2$

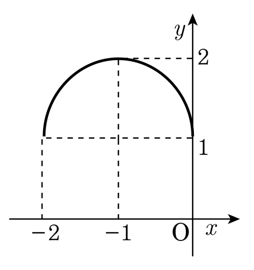
46. 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)+1$, $h(x)=g(x+1)-2$ 라고 할 때, $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음 중 $y=f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?



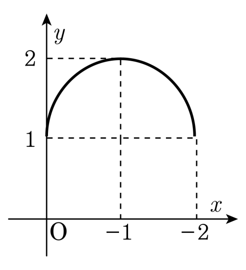
①



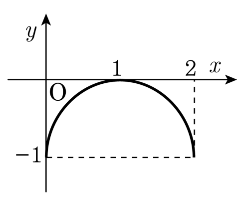
②



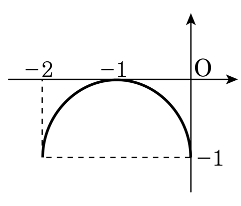
③



④

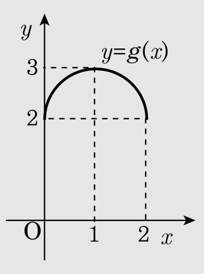


⑤

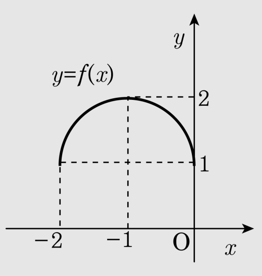


해설

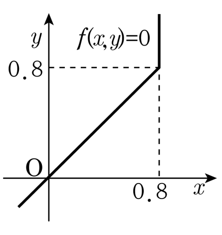
$y=h(x)$ 의 그래프는 $y=g(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로
$y=g(x)$ 의 그래프는 $y=h(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
평행이동한 것이다.
따라서, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

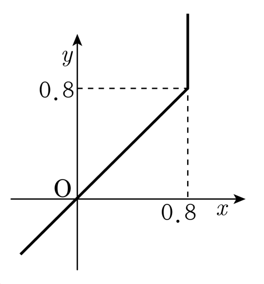


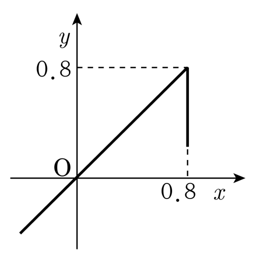
또, $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼
평행이동한 것이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는
$y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

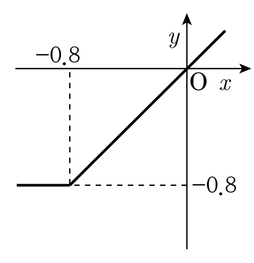


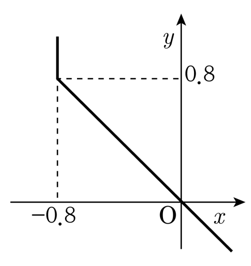
47. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, $f(-y, -x) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

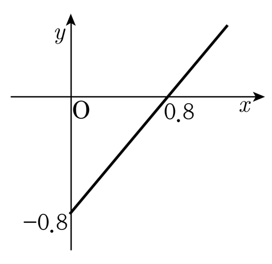


①


②


③


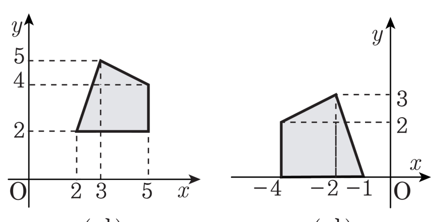
④


⑤


해설

$f(-y, -x) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을
직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.
이때, 꺾인 점 $(0.8, 0.8)$ 은
점 $(-0.8, -0.8)$ 로 옮겨진다.
따라서, 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ③과 같다.

48. 그림 (가) 의 도형은 평행이동 및 대칭이동에 의해 그림 (나) 로 이동한다. 그림 (가) 의 도형의 방정식이 $f(x, y) = 0$ 일 때, 그림 (나) 의 도형의 방정식은?



(가) (나)

① $f(x+1,\ y+2)=0$　② $f(x+1,\ y-2)=0$

③ $f(-x-1,\ y-2)=0$　④ $f(-x+1,\ y-2)=0$

⑤ $f(-x+1,\ y+2)=0$

해설

그림 (가) 의 도형이 y 축에 대해 대칭되고
x 축의 방향으로 1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 이동되었으므로
그림 (나) 의 도형의 방정식은
$f(-x+1,\ y+2)=0$ 이 된다.

49. 다음은 갑, 을, 병, 정 네 사람이 도형의 이동에 대하여 말한 것이다. 올바르게 말한 사람은?

갑 : 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(x-a, y-b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 $f(x,y) = 0$ 이 나타내는 도형은 $f(x+a, y+b) = 0$ 이 나타내는 도형으로 이동 한다.
을 : 점 (x,y) 를 점 $(x-2, y+1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2,-1)$ 은 점 $(0,0)$ 으로 이동한다.
병 : 점 (x,y) 를 점 $(-x,-y)$ 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $y = f(x)$ 이 나타내는 도형은 $y = -f(-x)$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.
정 : 점 (x,y) 를 점 (y,x) 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $f(x,y) = 0$ 이 나타내는 도형은 $f(y,x) = 0$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.

① 갑, 을, 병　② 갑, 을, 정　③ 갑, 병, 정
④ 을, 병, 정　⑤ 갑, 을, 병, 정

해설

갑, 을, 정 : 참
병 : $(x,y) \rightarrow (-x,-y)$: 원점 대칭
$\therefore\ y = f(x) \rightarrow -y = f(-x)$: 거짓

50. 다음 중 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$　　② $x^2+y^2=1$

③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$　　④ $x^2+y^2=4$

⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 2인 ④이다.