1. $P = a^3 + 4a^2b + 2ab^2$, $Q = -2a^2b + 3ab^2 - b^3$ 일 때, $3P - 2Q$를 계산하면?

① $3a^3 + 12a^2b + 2b^3$ ② $3a^3 - 12a^2b + 2b^3$

③ $3a^3 + 16a^2b + 2b^3$ ④ $3a^3 + 8a^2b + 2b^3$

⑤ $3a^3 - 8a^2b + 2b^3$

해설

$$\begin{aligned}
&3(a^3 + 4a^2b + 2ab^2) - 2(-2a^2b + 3ab^2 - b^3)\\
&= 3a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + 4a^2b - 6ab^2 + 2b^3\\
&= 3a^3 + 16a^2b + 2b^3
\end{aligned}$$

2. 다항식 $A = x^2 - x + 1$, $B = 3x^2 - 2x - 1$에 대하여 $X + 2A = B$를 만족하는 다항식 X를 구하면?

① $x^2 + 3x + 1$　② $x^2 - 1$　③ $x^2 - 3$

④ $x^2 + 1$　⑤ $2x^2 - x + 1$

해설

$$\begin{aligned} X &= B - 2A \\ &= (3x^2 - 2x - 1) - 2(x^2 - x + 1) \\ &= x^2 - 3 \end{aligned}$$

해설

3. 다음 등식 중에서 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 것을 모두 고르면?

① $(x-2)(x+2)=x^2-4$
② $x^2-x=x(x+2)$
③ $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$
④ $x(x-2)=0$
⑤ $x+y=x-y$

해설

②는 $x=0$일 때만 성립하고,
④는 $x=0, 2$일 때만 성립한다.
그리고 ⑤는 $y=0$일 때만 성립한다.
①과 ③은 모든 실수에 대하여 성립한다.

4. 등식 $2x^2 - 3x - 2 = a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1)$ 이 x에 관한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c에 대하여 $a + 2b + 3c$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

양변에 $x = 0$을 대입하면

$-2 = 2a \quad \therefore \ a = -1$

양변에 $x = 1$을 대입하면

$-3 = -b \quad \therefore \ b = 3$

양변에 $x = 2$를 대입하면

$0 = 2c \quad \therefore \ c = 0$

$\therefore \ a + 2b + 3c = 5$

5. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$ ② $x^4y^2 - xy^5$ ③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$ ⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

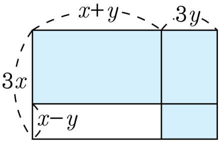
6. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$　② $4x^2 - 7x + 3$　③ $4x^2 - 4x + 5$
④ $4x^2 - 8x + 2$　⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.
몫 : $4x^2 - x - 2$, 나머지 : $-5x + 3$
$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

7. 다음 그림의 직사각형에서 색칠한 부분의 넓이를 나타내는 식을 세워 전개하였을 때, y^2 항의 계수는?



① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$(x+4y)(3x)-(x+y)(x-y)$
$=3x^2+12xy-x^2+y^2$
$=2x^2+12xy+y^2$

8. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $-3(m+n)$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 14 ⑤ 18

해설

$$f(x) = x^3+mx^2+nx+1$$
$$= (x+1)Q(x)+5$$

$$f(x) = x^3+mx^2+nx+1$$
$$= (x-2)Q'(x)$$

$$\therefore f(-1) = -1+m-n+1 = 5$$
$$f(2) = 8+4m+2n+1 = 0$$
$$\therefore m = \frac{1}{6},\ n = -\frac{29}{6}$$
$$\therefore m+n = -\frac{14}{3},\ -3(m+n) = 14$$

9. 다음 중 다항식 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a + c$ ② $a - b^2$ ③ $a^2 - b^2 + c^2$

④ $a^2 + b^2 + c^2$ ⑤ $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$$
\begin{aligned}
&a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2 \\
&= a^3 - b^3 + (a - b)c^2 - ab(a - b) \\
&= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)c^2 - ab(a - b) \\
&= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab) \\
&= (a - b)(a^2 + b^2 + c^2)
\end{aligned}
$$

10. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, $a,\ b,\ c$를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$ ② $-1,\ 1,\ 2$ ③ $-2,\ -1,\ 1$

④ $-1,\ -1,\ -2$ ⑤ $-1,\ 2$

해설

$$x^2-2x-y^2+2y=(x+y)(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-2)$$
$$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$$

11. 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R　② $3Q(x)$, $3R$　③ $3Q(x)$, R

④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R　⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R=\frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$$

12. 등식 $(2k+1)y-(k+3)x+10=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 성립하도록 하는 상수 x, y에 대하여 $x+y$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

(준식)$=(y-3x+10)+(2y-x)k=0$

$\therefore 2y=x,\ \ y-3x=-10$

$\therefore x=4,\ \ y=2$

$\therefore x+y=6$

13. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1} = k$라 놓으면

$2x+ay-b = k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k = 0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

14. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+3을 $(x-1)^2$을 나누었을 때 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

최고차항의 계수가 1이므로

x^3+ax^2+bx+3

$=(x-1)^2(x+k)+2x+1$

$=x^3+(k-2)x^2+(3-2k)x+k+1$

양변의 계수를 비교하면

$a=k-2,\ b=3-2k,\ 3=k+1$

$k=2$이므로 $a=0,\ b=-1$

$\therefore\ a-b=0-(-1)=1$

15. $(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4$을 전개했을 때, 계수들의 총합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 512

해설

$(4x^2-3x+1)^5(x^3-2x^2-1)^4 = ax^{22}+bx^{21}+\cdots+c$

위의 식에 $x=1$을 대입하면, 모든 계수들의 총합이 나온다.

$\therefore$ (계수의 총합) $=2^5\times(-2)^4=512$

16. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 -3이고, $x-3$으로 나눈 나머지가 5이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$로 나누었을 때의 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x-1$

해설

$f(-1)=-3,\ f(3)=5$

$f(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$

$-a+b=-3,\ 3a+b=5$

$a=2,\ b=-1$

$\therefore\ ax+b=2x-1$

17. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$

$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1\cdots$㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$

$\therefore\ Q(1)=2$

18. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x) - 2$는 $x - 1$로 나누어떨어지므로

$f(1) - 2 = 0 \therefore\ 1 + a + b - 2 = 0$

$\therefore\ a + b = 1 \cdots$ ①

$f(x) + 2$는 $x + 1$로 나누어떨어지므로

$f(-1) + 2 = 0 \therefore\ 1 - a + b + 2 = 0$

$\therefore\ -a + b = -3 \cdots$ ②

①, ② 에서 $a = 2,\ b = -1$

$\therefore\ a - 2b = 4$

19. x에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $i=1$일 때, $a+b+c$의 값을 옳게 구한 것은?

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & d & e & f \\ \hline & 1 & g & h & \boxed{i} \end{array}$$

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

다항식 x^3+ax^2+bx+c를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a & b & c \\ & & 1 & a+1 & a+b+1 \\ \hline & 1 & a+1 & a+b+1 & \boxed{a+b+c+1} \end{array}$$

이때 $a+b+c+1=1$이므로

$a+b+c=0$

따라서 ③이다.

20. $(x^2-8x+12)(x^2-7x+12)-6x^2$ 을 인수분해하면?

① $(x^2-x+2)(x^2-5x+2)$

② $(x^2-5x+12)(x^2-10x+12)$

③ $(x^2-3x+4)(x^2-x+2)$

④ $(x^2+3x+12)(x^2-5x+12)$

⑤ $(x^2+x+12)(x^2-2x+12)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x^2+12)-8x\}\{(x^2+12)-7x\}-6x^2 \\ &= (x^2+12)^2-15x(x^2+12)+50x^2 \\ &= (x^2+12-5x)(x^2+12-10x) \\ &= (x^2-5x+12)(x^2-10x+12)\end{aligned}$$

21. n^4-6n^2+25의 값이 소수가 되게 하는 정수 n의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개

④ 없다 ⑤ 무수히 많다

해설

$$\begin{aligned} p &= n^4-6n^2+25 \\ &= n^4+10n^2+25-16n^2 \\ &= (n^2+5)^2-(4n)^2 \\ &= (n^2+4n+5)(n^2-4n+5) \end{aligned}$$

p가 소수이므로 $n^2+4n+5=1$

또는 $n^2-4n+5=1$이어야 한다.

$n^2+4n+4=(n+2)^2=0$ 에서 $n=-2$

$n^2-4n+4=(n-2)^2=0$ 에서 $n=2$

따라서 구하는 n은 두 개이다.

22. $2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$를 인수분해 하면$(x+ay+b)(2x+cy+d)$이다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$2x^2+xy-3y^2+5x+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-3y^2+5y+2$
$=2x^2+(y+5)x-(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{2x+(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(2x+3y+1)$
$\therefore\ a=-1, b=2, c=3, d=1$

23. $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$을 바르게 인수분해 한 것을 찾으면?

① $(x^2+1)(x+3)(x+1)$

② $(x^2+1)(x+3)(x-1)$

③ $(x^2+1)(x-3)(x-1)$

④ $(x^2-3)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+3)(x-1)(x+1)$

해설

$f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$라 하면

$f(1)=0, f(3)=0$이므로

$f(x)$는 $x-1, x+3$로 나누어떨어진다.

$$\therefore\ f(x)=x^4+2x^3-2x^2+2x-3$$
$$=(x^2+1)(x+3)(x-1)$$

24. 실수 $x,\ y$가 $xy=6,\ x^2y+xy^2+x+y=63$을 만족시킬 때, x^2+y^2의 값은?

① 13　　② $\dfrac{1173}{32}$　　③ 55　　④ 69　　⑤ 81

해설

x^2y+xy^2+x+y

$=xy(x+y)+(x+y)$

$=(xy+1)(x+y)$

$=7(x+y)=63,$

$x+y=9,\ xy=6$

$$\therefore\ \ x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

$$=81-12=69$$

25. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16 ② 8 ③ 4 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

26. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$을 곱해도 값은 변하지 않으므로

$$\begin{aligned}P&=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)\\&=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=\quad\vdots\\&=(2^{16}-1)(2^{16}+1)\\&=2^{32}-1\end{aligned}$$

27. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

28. $a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값은?

① 3　② -3　③ 1　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$1=a^2+b^2+c^2+2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=-1$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^3+b^3+c^3-3=1\cdot(-1-1)=-2$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=1$