**1.** 다음 글은 청산이네 반의 학급회의 기록이다. 밑줄 친 내용 중 집합인 것의 번호를 고르면?

> 교내 체육 대회 때 장애물 달리기 선수는 ① 키가 작은 학생, 릴레이 선수는 ② 빠른 학생, 응원단장은 ③ 목소리가 큰 학생, 배구선수는 ④ 키가 큰 학생이 하기로 한다. 그리고, 줄다리기는 ⑤ 학급인원 전체가 참석하기로 한다.

① 키가 작은 학생
② 빠른 학생
③ 목소리가 큰 학생
④ 키가 큰 학생
⑤ 학급인원 전체

해설

⑤ 학급인원 전체가 집합이다.

**2.** 집합 $A$는 2, 3, 5, 7 을 원소로 가질 때, 다음 중 <u>틀린</u> 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $1 \notin A$ ② $2 \in A$ ③ $6 \notin A$ ④ $9 \in A$ ⑤ $3 \notin A$

해설

$a$가 집합 $A$의 원소이면 $a \in A$, $b$가 $A$의 원소가 아니면 $b \notin A$ 이다.

④ $9 \notin A$

⑤ $3 \in A$

**3.** 집합 $A = \{a \mid a$는 12의 약수이고, 짝수인 자연수$\}$를 원소나열법으로 나타낸 것은?

① $A = \{2, 4\}$　② $A = \{2, 4, 6\}$

③ $A = \{2, 4, 6, 8\}$　④ $A = \{2, 4, 6, 12\}$

⑤ $A = \{2, 4, 6, 8, 12\}$

해설

12 의 약수는 $1, 2, 3, 4, 6, 12$ 이고 이 중에서 짝수는 $2, 4, 6, 12$ 이므로 $A = \{2, 4, 6, 12\}$ 이다.

**4.** 세 집합

$A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$,

$B = \{x \mid x$는 20 이하의 소수$\}$ ,

$C = \{x \mid x$는 15의 약수$\}$ 일 때,

$n(A) + n(B) + n(C)$ 의 값을 구하여라.

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

$C = \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$

$\therefore\ n(A) + n(B) + n(C) = 5 + 8 + 4 = 17$

**5.** 두 집합 $A = \{1,\ 3,\ 6\}$, $B = \{x-1,\ x+4,\ 3\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, $x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$A = B$ 이므로 $x-1 = 1$, $x+4 = 6$

$\therefore\ x = 2$

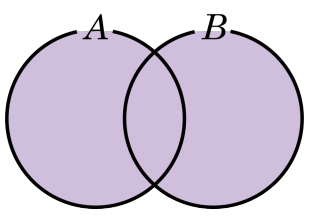
**6.** 집합 $X = \{a, b, c, d, e, f\}$의 부분집합 중에서 $\{a, c, f\}$와 서로소인 집합의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 8개 ⑤ 16개

해설

$2^{6-3} = 2^3 = 8$(개)

**7.** 두 집합 $A = \{x|x$는 10 이상 20 미만의 소수$\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 일 때 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 ?




① $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

② $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

③ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 17\}$

④ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

⑤ $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면
$A = \{11, 13, 17, 19\}$
벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.




색칠한 부분이 나타나는 원소는
$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$ 이다.

**8.** 두 집합 $A$, $B$ 에 대하여 $n(A) = 21$ ,
$n(B) = 14$ , $n(A \cup B) = 29$ 일 때, $n(A \cap B)$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$29 = 21 + 14 - n(A \cap B)$
$\therefore n(A \cap B) = 6$

**9.** 집합 $A, B$ 에 대하여 $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, A - B = \{5, 7\}$ 일 때, 집합 $B$ 는?

① $\{1\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{1, 3\}$

④ $\{1, 3, 9\}$ ⑤ $\{1, 3, 7, 9\}$

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같으므로 집합 $B = \{1, 3, 9\}$ 이다.

**10.** 전체집합 $U$ 의 부분집합 $A$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cap B^c = A - B$　　② $A^c = U - A$

③ $A \cap \varnothing = A$　　④ $A \cap U = A$

⑤ $A \cup U = U$

해설

③ $A \cap \varnothing = \varnothing$

**11.** 전체집합 $U$와 부분집합 $A$, $B$, $C$에 대하여 다음 중 성립하지 않는 것은?

① $A \cap (A \cup B) = B$　　② $A \cup (A \cap B) = A$

③ $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$　　④ $(A - B)^c = A^c \cup B$

⑤ $A \cap (A \cup B)^c = \phi$

해설

①$A \cap (A \cup B) = A$

**12.** 전체집합 $U$ 의 두 부분집합 $A, B$ 에 대하여 $n(U) = 30, n(A) = 12, n(B) = 15, n(A \cap B) = 8$ 일 때, $n(A^c) - n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$n(A^c) = n(U) - n(A) = 30 - 12 = 18$ 이다.
$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 15 - 8 = 7$ 이므로 $n(A^c) - n(B - A) = 18 - 7 = 11$ 이다.

**13.** 명제 '$x$ 가 4의 배수가 아니면 $x$ 는 2의 배수가 아니다.'는 거짓이다. 다음 중에서 반례인 것은?

① $x=1$　② $x=12$　③ $x=10$

④ $x=8$　⑤ $x=4$

해설

가정을 만족시키면서 결론을 만족시키지 않는 것이 반례가 된다. 즉, $x=10$ 은 4의 배수가 아니지만 2의 배수가 되므로 반례로 적당하다.

**14.** 양수 $x$에 대하여 $\dfrac{x^2+2x+2}{x}$는 $x=a$에서 최솟값 $b$를 가질 때, $-2a+b+1$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x>0$이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x}=x+2+\frac{2}{x}$$

$$x+\frac{2}{x}+2\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2\sqrt{2}+2$$

(단, 등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2}+2$이므로 $b=2\sqrt{2}+2$

등호는 $x=\sqrt{2}$일 때 성립하므로 $a=\sqrt{2}$

따라서 $-2a+b+1=-2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2)+1=3$

**15.** $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$이고, $a+b+c=14$일 때, $\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c}$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(1^2+2^2+3^2)\left\{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2\right\}$
$\geq (\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$
$(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2 \leq 14(a+b+c)=14^2$
이 때 $a \geq 0,\ b \geq 0, c \geq 0$이므로
$0 \leq \sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c} \leq 14$
따라서 최댓값은 14이다.

**16.** 다음 중에서 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ $\{x \mid x$는 3의 약수 $\} \subset \{1,\ 2,\ 3\}$

㉡ $\{a,\ b\} \in \{a,\ b,\ c\}$

㉢ $0 \in \varnothing$

㉣ $\varnothing \in \{x \mid x$는 6의배수$\}$

㉤ $\varnothing \subset \{1\}$

㉥ $\varnothing \subset \varnothing$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉥

해설

㉡ $\{a,\ b\} \in \{a,\ b,\ c\}$에서 집합과 집합 사이의 관계는 $\subset$를 써야 한다.

㉢ $0 \in \varnothing$에서는 $\varnothing \subset \{0\}$이어야 한다.

㉣ $\varnothing \in \{x \mid x$는 6의 배수$\}$에서는 $\subset$를 써야한다.

㉥ 공집합$(\varnothing)$은 모든 집합의 부분집합이다.

**17.** 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 의 부분집합 중 원소가 2 개인 집합은 $a$ 개이고, 원소가 5 개인 집합은 $b$ 개이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 42

해설

집합 $A$ 의 원소 2 개를 짝짓는 방법은
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$, $\{1,\ 6\}$,
$\{1,\ 7\}$,
$\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 5\}$, $\{2,\ 6\}$, $\{2,\ 7\}$,
$\{3,\ 4\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{3,\ 6\}$, $\{3,\ 7\}$
$\{4,\ 5\}$, $\{4,\ 6\}$, $\{4,\ 7\}$
$\{5,\ 6\}$, $\{5,\ 7\}$,
$\{6,\ 7\}$
따라서, 원소가 2 개인 부분집합의 개수는
$6+5+4+3+2+1 = 21$ (개) 이다.
집합 $A$ 의 부분집합 중 원소가 5 개인 집합은 원소 2 개를 짝짓고 남은 5 개의 원소를 원소로 갖는 집합이므로 원소가 2 개인 부분집합의 개수와 같은 개수의 부분집합이 만들어진다. 즉 21 개가 된다.
$a = 21,\ b = 21$ 이므로 $a + b = 42$

**18.** 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

집합 $A$ 의 원소의 개수는 4 개이므로, $2^4 = 16$ (개)

**19.** 두 집합 $A = \{11,\ 13\}$, $B = \{9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 $X$ 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 $X$ 는 집합 $B$ 의 부분집합 중 원소 11, 13 을 모두 포함하는 집합이므로 구하는 집합 $X$ 의 개수는 $2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

**20.** 두 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{1,2,3,6,7\}$ 에 대하여 다음의 두 조건을 모두 만족시키는 집합 $X$ 의 개수를 구하여라.

$$A \cup X = A, (A \cap B) \cup X = X$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

$A \cup X = A$ 이므로 $X \subset A \cdots$ ㉠
$(A \cap B) \cup X = X$ 이므로 $(A \cap B) \subset X \cdots$ ㉠
㉠, ㉡으로부터 $(A \cap B) \subset X \subset A$
즉, 집합 $X$는 $(A \cap B)$의 원소를 포함하는 집합 $A$의 부분집합이다.
$A \cap B = \{1,2,3\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$ 이므로 $\{1,2,3\} \subset X \subset \{1,2,3,4,5\}$
집합 $X$는 $\{1,2,3,4,5\}$의 부분집합 중 원소 1, 2, 3을 포함하는 집합이므로 그 개수는 $2^{5-3} = 2^2 = 4$(개)

**21.** 집합 $A = \{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 2, 4, $n$ 을 모두 포함하는 부분집합의 개수가 16 개일 때, $n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

집합 $A$ 의 원소의 개수를 $a$ 개라 하면 원소 2, 4, $n$을 모두 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{a-3}$ 개이다.
$2^{a-3} = 16 = 2^4$
$a - 3 = 4$ 이므로 $a = 7$
따라서 집합 $A$의 원소의 개수가 7 개이므로 $n$의 값은 14이다.

**22.** 세 집합 $A = \{x \mid x$는 18의 약수$\}$ , $B = \{x \mid x$는 30의 약수$\}$ , $C = \{x \mid x$는 10이하의 3의 배수$\}$ 에 대하여 $n(A \cup (B \cup C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고치면 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ , $C = \{3, 6, 9\}$ 이다.
$B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 30\}$ 이고 이것과 $A$ 의 합집합을 구하면 $\{1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30\}$ 이다.
따라서 원소의 개수는 10 개이다.

**23.** 실수 $x$, $y$, $z$ 에 대하여 조건 '$x^2+y^2+z^2=0$' 의 부정과 서로 같은 것은?

① $x=y=z=0$

② $x=0$ 또는 $y=0$ 또는 $z=0$

③ $x\neq 0$ 이고 $y\neq 0$ 이고 $z\neq 0$

④ $x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$ 또는 $z\neq 0$

⑤ $x\neq 0$ 이고 $y=0$ 이고 $z=0$

해설

$x^2+y^2+z^2=0$ 의 부정은 $x^2+y^2+z^2\neq 0$ 이다.
$\therefore x\neq 0$ 또는 $y\neq 0$ 또는 $z\neq 0$

**24.** 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에 대하여 조건 $x^2 - 2 > 0$ 의 진리집합은?

① $\varnothing$ ② $\{0,\ 1\}$ ③ $\{3,\ 4,\ 5\}$

④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ⑤ $U$

해설

주어진 조건 $x^2 - 2 > 0$ 에
$x = 0$ 을 대입하면 $0 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 1$ 을 대입하면 $1 - 2 > 0$ (거짓)
$x = 2$ 를 대입하면 $4 - 2 > 0$ (참)
$x = 3$ 을 대입하면 $9 - 2 > 0$ (참)
$x = 4$ 를 대입하면 $16 - 2 > 0$ (참)
$x = 5$ 를 대입하면 $25 - 2 > 0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

**25.** 다음 중 거짓인 명제는?

① 모든 소수는 약수를 2개 가진다.

② 어떤 소수는 홀수가 아니다.

③ 모든 실수 $a$ 에 대하여 $a^2 > 0$ 이다.

④ $a$, $b$ 가 유리수이면 $a+b$ 도 유리수이다.

⑤ 중산고등학교 1 학년 학생들은 수학 공부를 열심히 한다.

해설

③ 0도 실수에 포함되므로 거짓이다.

**26.** 전체집합 $U$ 에 대하여 두 조건 $p, q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P, Q$ 라 하자. 명제 '$p$ 이면 $\sim q$ 이다.'가 참일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P \subset Q$　② $Q \subset P$　③ $P - Q = P$

④ $Q^c \subset P$　⑤ $P \cup Q^c = U$

해설

$p \Rightarrow \sim q$ 이면 $P \subset Q^c$ 인 진리집합의 관계가 성립한다. 즉,
$P \cap Q^c = P \Leftrightarrow P - Q = P$

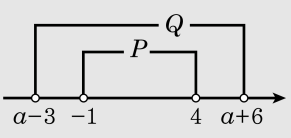
**27.** 실수 전체의 집합에서의 두 조건 $p : -1 < x < 4$, $q : a-3 < x < a+6$ 일 때, 명제 $p \to q$ 가 참이기 위한 실수 $a$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

두 조건 $p$, $q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P$, $Q$ 라고 하면 $P = \{x \mid -1 < x < 4\}$

$Q = \{x \mid a-3 < x < a+6\}$




이때, 명제 $p \to q$ 가 참이려면 $P \subset Q$ 이어야 하므로 위 수직선에서 $a-3 \le -1$ 이고 $a+6 \ge 4$ 이다.

$\therefore -2 \le a \le 2$

따라서, $a$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 $-2$이므로 최댓값과 최솟값의 합은 0이다.

**28.** 다음 중 거짓인 명제는?

① 자연수 $n$ 에 대하여 $n^2$ 이 짝수이면 $n$ 도 짝수이다.

② 자연수 $n$ 에 대하여 $n^2$ 이 홀수이면 $n$ 도 홀수이다.

③ 자연수 $n$ 에 대하여 $n^2$ 이 3의 배수이면 $n$ 도 3의 배수이다.

④ 자연수에 대하여 두 수가 모두 짝수이면 두 수의 합도 짝수이다.

⑤ 자연수에 대하여 두 수의 합이 짝수이면 두 수는 모두 짝수이다.

해설

주어진 명제의 참, 거짓에 대한 직접적인 판단이 어려울 때는 그 명제의 대우가 참인지 확인한다.
①,② 생략
③ $n = 3k + 1$ $n^2 = (3n + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \neq 3m$(참)
(대우가 참 → 참인 명제)
④ 두 수의 합이 홀수이면 두 수 중 적어도 하나는 홀수이다. (참)
⑤ 반례 : 두 수 모두 홀수인 경우(거짓)

**29.** 두 명제 $p \to q$와 $\sim r \to p$가 모두 참일 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $\sim p \to r$　② $\sim q \to r$　③ $q \to r$

④ $\sim q \to \sim p$　⑤ $\sim r \to q$

해설

① 명제$\sim r \to p$ 참이므로 대우인$\sim p \to r$ 도 참

②, ⑤

명제$p \to q$ , $\sim r \to p$ 로부터 ⑤ $\sim r \to q$ 참이고, 대우인 ② $\sim q \to r$ 참이다.

④ $p \to q$ 이 참이므로 대우인 $\sim q \to \sim p$ 도 참이다.

**30.** 우리 학교에서 다음 두 명제는 참이다.

> ㉠ 우리학교 동아리 회원들은 축제에 참석한다.
>
> ㉡ 우리학교 어떤 학생들은 축제에 참석하지 않는다.

이 때, 다음 명제 중 참인 것은?

① 어떤 동아리 회원들은 우리학교 학생이 아니다.

② 우리학교 학생들은 모두 동아리 회원이다.

③ 동아리 회원들은 우리학교 학생이 아니다.

④ 우리학교 어떤 학생들은 동아리 회원이 아니다.

⑤ 우리학교 어떤 학생들은 동아리 회원이다

해설

①, ②, ③은 직관적으로 판단해도 거짓이다. 우리 학교 어떤 학생들은 축제에 참석하지 않았고, 모든 우리학교 동아리 회원들은 축제에 참석하였다고 하였으므로 우리학교 학생 중에는 동아리 회원이 아닌 학생이 있음을 알 수 있다. 따라서 ④는 참이다. 한편 동아리 회원이 한 명도 없는 경우도 주어진 두 조건 ㉠, ㉡를 만족하므로 ⑤번은 거짓이 된다.

∴ 답 ④

**31.** 자연수 $n$에 대하여 $n^2$이 짝수이면 $n$도 짝수임을 증명하는 과정이다. (1), (2), (3)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

[증명]
주어진 명제의 (1)을(를) 구하여 보면
(1) : '$n$이 홀수이면 $n^2$도 홀수이다.'
이 때, $n$이 홀수이므로 $n$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$n =$ (2)($k$는 0 또는 자연수)
이 때, $n^2$의 값을 구하면
$n^2 = (2)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$는 (3)이므로 $n^2$은 홀수이다.
따라서 (1)가(이) 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

① 역, $2k + 1$, 0 또는 짝수
② 이, $2k - 1$, 홀수
③ 대우, $2k + 1$, 0 또는 짝수
④ 대우, $2k - 1$, 0 또는 홀수
⑤ 역, $2k + 1$, 0 또는 홀수

해설

[증명]
주어진 명제의 대우를 구하여 보면
대우 : '$n$이 홀수이면 $n^2$도 홀수이다.'
이 때, $n$이 홀수이므로 $n$을 다음과 같이 나타낼 수 있다.
$n = 2k + 1$($k$는 0 또는 자연수)
이 때, $n^2$의 값을 구하면
$n^2 = 2 + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
여기서 $2(k^2 + 2k)$는 0 또는 짝수이므로 $n^2$은 홀수이다.
따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도는 참이다.

**32.** 다음에서 조건 $p$가 조건$q$ 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 골라 기호로 써라. (단,$a,b$ 는 실수)

| |
|---|
| ㉠ $p : A \cup B = B,\ q : A \subset B$ |
| ㉡ $p : a^2 + b^2 = 0,\ q : a = 0$ 이고 $b = 0$ |
| ㉢ $p : a^2 = b^2\ q : a = b$ |

▶ 답 :

◁ 정답 : ㉢

해설

㉢ $p : a^2 = b^2 \leftarrow q : a = b$
$\therefore p$는 $q$이기 위한 필요조건

**33.** $x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3$ 이기 위한 필요조건이 $x \le a$ 이고, 충분조건이 $x \le b$ 일 때, $a$ 의 최솟값을 $m$ , $b$ 의 최댓값을 $M$ 이라 할 때, $m + M$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

문제에서 주어진 조건에 의하여$\{x \mid x \le b\} \subset \{x \mid x \le -2$ 또는 $0 < x \le 3\} \subset \{x \mid x \le a\}$ 가 되어야 하므로

$\therefore a \ge 3,\ b \le -2$

따라서 $a$ 의 최솟값은 3, $b$ 의 최댓값은 $-2$이다.

$\therefore\ m + M = 3 + (-2) = 1$

**34.** 두 조건 $p$, $q$ 를 만족하는 집합을 각각 $P$, $Q$ 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 $p$ 는 $q$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$
$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$
$(P \cap U) \cap Q = P$
$P \cap Q = P$
$P \subset Q$
$\therefore\ p \Rightarrow q$
따라서, $p$ 는 $q$ 이기 위한 충분조건이다.

**35.** $x > 0,\ y > 0,\ xy = \dfrac{9}{2}$ 일 때 $5x + 10y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 30

해설

$5x + 10y \geq 2\sqrt{50xy}$

그런데 $2\sqrt{50xy} = 2\sqrt{50 \times \dfrac{9}{2}}$

$= 2\sqrt{25 \times 9} = 2 \times 15 = 30$

따라서 구하는 최솟값은 30

**36.** 집합 $A$ 에 대하여 $P(A) = \{X | X \subset A\}$ 라고 하자. $A = \{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?

| | |
|---|---|
| ㉠ $\{\{1,\ 2\}\} \in P(A)$ | ㉡ $\{\{1,\ 2\}\} \subset P(A)$ |
| ㉢ $\varnothing \in P(A)$ | ㉣ $\varnothing \subset P(A)$ |

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다.

해설

$P(A)$는 집합 $A$의 부분집합으로 이루어진 집합이다. 즉, $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{\{1,\ 2\}\}, \{1,\ 2\}, \{1,\ \{1,\ 2\}\}, \{2,\ \{1,\ 2\}\},\ A\}$
따라서, ㉠, ㉡, ㉢, ㉣의 4개가 모두 옳다.

**37.** 집합 $A$, $B$, $C$ 에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $U$ 는 전체집합이고, $A^c$ 는 $A$ 의 여집합이다.)

① $A \subset B$ 이면 $B^c \subset A^c$ 이다.

② $A = B^c$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.

③ $A \cap B = \varnothing$ 이고 $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.

④ $A \subset B$, $A \subset C$ 이면 $A \subset (B \cup C)$ 이다.

⑤ $A \cap B^c = \varnothing$ 이면 $A^c \cup B = U$ 이다.

해설

① $A \subset B$ 이므로 $B^c \subset A^c$

② $A = B^c$ 이므로 $A \cup B = B^c \cup B = U$

③ 예를 들어 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ , $A = \{1,\ 2\}$ , $B = \{3,\ 4\}$ 일 때, $A \cap B = \varnothing$ 이지만 $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \neq U$ 이므로 옳지 않다.

④ $A \subset B$, $A \subset C$ 이므로 $A \subset (B \cap C) \subset (B \cup C)$
$\therefore\ A \subset (B \cup C)$

⑤ $A \cap B^c = \varnothing$ 에서 $(A \cap B^c)^c = \varnothing^c$
$\therefore\ A^c \cup B = U$

**38.** 다음 두 조건을 만족하는 집합 $A$ 의 부분집합의 개수는?

| |
|---|
| $A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$<br>$A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ |

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$ 에서 집합 $A$는 원소 2, 5를 포함하고, 원소 3, 4는 포함하지 않는다.
$A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $A$는 원소 1을 포함한다.
$\therefore\ A = \{1,\ 3,\ 4\}$
따라서 집합 $A$의 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개)이다.

**39.** 축구공을 가지고 있는 학생은 15 명, 농구공을 가지고 있는 학생은 10 명, 둘 다 가지고 있는 학생이 3 명일 때, 축구공 또는 농구공을 가지고 있는 학생은 몇 명인가?

① 21 명 ② 22 명 ③ 23 명 ④ 24 명 ⑤ 25 명

해설

축구공을 갖고 있는 학생과 농구공을 갖고 있는 학생의 집합을 각각 $A$, $B$ 라 하면, 둘 다 가지고 있는 학생의 집합은 $A \cap B$ 이다.
$n(A) = 15,\ n(B) = 10,\ n(A \cap B) = 3$
$n(A \cup B) = 15 + 10 - 3 = 22$

**40.** 세 집합 $A = \{x|x$는 20 이하의 3의 배수$\}$,
$B = \{x|x$는 12의 약수$\}$,
$C = \{x|x$는 20 이하의 홀수$\}$
에 대하여 $C - (A \cap B)$ 로 알맞은 것은?

① $\{5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

② $\{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

③ $\{1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

④ $\{1, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}$

⑤ $\{1, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

해설

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$,
$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,
$C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
이므로
$A \cap B = \{3, 6, 12\}$




$\therefore C - (A \cap B) = \{1, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

**41.** 전체집합 $U=\{1,2,3,4,6,7\}$ 의 두 부분집합 $A, B$ 에 대하여 $A=\{2,4,6\}, A\cap B=\{2\}, B\cap A^c=\{1,3,5\}, A^c\cap B^c=\{7\}$ 일 때, $A^c$ 은?

① $\{1,3\}$ ② $\{1,5\}$ ③ $\{1,7\}$

④ $\{3,5,7\}$ ⑤ $\{1,3,5,7\}$

해설

$B\cap A^c=\{7\}=B-A$ 이므로

$A^c=U-A=\{1,3,5,7\}$ 이다.

**42.** 집합 $A=\{x|x$는 15미만의 소수$\}$ 에 대하여 $n(A\cap B)=2$ 이고 $B-A=\varnothing$ 인 집합 $B$ 의 개수로 알맞은 것은?

① 3 개 ② 6 개 ③ 9 개 ④ 12 개 ⑤ 15 개

해설

$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13\}$, $B-A=\varnothing$ 이면 $B\subset A$ $\therefore A\cap B=B$

$n(B)=n(A\cap B)=2$

$\therefore$ 집합 $B$ 는 원소의 개수가 2 개인 집합$A$ 의 부분집합이므로

$\{2,3\}$, $\{2,5\}$, $\{2,7\}$, $\{2,11\}$, $\{2,13\}$, $\{3,5\}$, $\{3,7\}$, $\{3,11\}$, $\{3,13\}$, $\{5,7\}$, $\{5,11\}$, $\{5,13\}$, $\{7,11\}$, $\{7,13\}$, $\{11,13\}$

따라서 $5+4+3+2+1=15($개$)$이다.

**43.** 집합 $A$, $B$, $C$에 대하여 $p$가 $q$이기 위한 필요충분조건인 것은?

① $p : (A \cap B) \subset (A \cup B),\ q : A = B$

② $p : A \cap (B \cap C) = A,\ q : A \cup (B \cup C) = B \cup C$

③ $p : A \cup (B \cap C) = A,\ q : A \cap (B \cup C) = B \cup C$

④ $p : A \cup B = A,\ q : B = \phi$

⑤ $p : A \cup (B - A) = B,\ q : A \subset B$

해설

① $(A \cap B) \subset (A \cup B) \Leftrightarrow A = B$ : 필요조건

② $p : A \cap (B \cap C) = A \subset (B \cap C)$
$q : A \cup (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow A \subset (B \cup C)$
$A \subset (B \cap C) \Rightarrow A \subset (B \cup C)$ : 충분조건

③ $p : A \cup (B \cap C) = A \Leftrightarrow (B \cap C) \subset A$
$q : A \cap (B \cup C) = B \cup C \Leftrightarrow (B \cup C) \subset A$
$(B \cap C) \subset A \Leftarrow (B \cup C) \subset A$ : 필요조건

④ $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
$B \subset A \Leftarrow B = \emptyset$ : 필요조건

⑤ $p : A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c) = A \cup B = B$
$q : A \cup (B - A) = B \Leftrightarrow (A \cup B) = B$
$\Leftrightarrow A \subset B \therefore P \Leftrightarrow Q$ : 필요충분조건

**44.** $0 < a < b,\ a+b=1$일 때, 다음 네 수 또는 식의 대소를 비교한 것 중 잘못된 것은?

| |
|---|
| $1,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b},\quad \sqrt{b}-\sqrt{a},\quad \sqrt{b-a}$ |

① $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{b-a}$　② $\sqrt{b}-\sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{a}+\sqrt{b} < 1$　④ $\sqrt{b-a} < 1$

⑤ $\sqrt{b-a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

주어진 네 수는 모두 양수이므로 제곱의 대소 관계를 알아보자.

(i) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-1^2 = a+2\sqrt{ab}+b-1$
$= 2\sqrt{ab} > 0$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > 1$
$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b} > 1$

(ii) $1^2-(\sqrt{b-a})^2 = 1-b+a$
$= (a+b)-b+a$
$= 2a > 0$
$\therefore\ 1 > \sqrt{b-a}$

(iii) $(\sqrt{b-a})^2-(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$
$= b-a-(b-2\sqrt{ab}+a)$
$= 2\sqrt{ab}-2a$
$= 2\sqrt{a}(\sqrt{b}-\sqrt{a}) > 0$
$\therefore\ \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

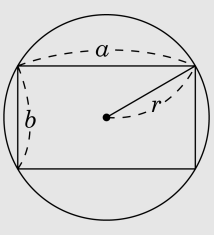
(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > 1 > \sqrt{b-a} > \sqrt{b}-\sqrt{a}$

**45.** 반지름이 $r(\text{cm})$인 원에 내접하는 직사각형의 넓이의 최댓값을 구하면?

① $2r(\text{cm}^2)$ ② $r^2(\text{cm}^2)$ ③ $2r^2(\text{cm}^2)$

④ $\sqrt{2}r^2(\text{cm}^2)$ ⑤ $\frac{r^2}{2}(\text{cm}^2)$

해설




$a^2+b^2=(2r)^2$

산술기하평균의 관계에 의해

$a^2+b^2 \geq 2\sqrt{(ab)^2}$

$4r^2 \geq 2(ab)$

$ab \leq 2r^2$,

(직사각형 넓이의 최댓값) $= 2r^2$

**46.** 집합 $S = \{\varnothing,\ 0,\ 1,\ \{1,\ 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $0 \in S$　② $\{0,\ 2\} \notin S$　③ $\varnothing \subset S$

④ $\{1,\ 2\} \in S$　⑤ $\{\varnothing\} \in S$

해설

집합 $S$ 의 원소는 $\varnothing, 0, 1, \{1, 2\}$ 이다.
① $0 \in S \rightarrow 0$ 은 집합 $S$ 의 원소이므로 옳다.
② $\{0, 2\} \notin S \rightarrow 2$는 집합 $S$ 의 원소가 아니므로 0 과 2 로 이루어진 집합은 $S$ 의 부분집합이 될 수 없다. 따라서 $\{0, 2\} \notin S$ 는 옳다.
③ $\varnothing \subset S \rightarrow \varnothing$ 는 집합 $S$ 의 원소이지만 공집합$(\varnothing)$는 모든 집합의 부분집합이므로 옳다.
④ $\{1, 2\} \in S \rightarrow \{1, 2\}$ 는 집합 $S$ 의 원소이므로 옳다.
⑤ $\{\varnothing\} \in S \rightarrow \{\varnothing\}$ 은 집합 $S$ 의 원소가 아니므로 옳지 않다.

**47.** 집합 $S=\left\{1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\frac{1}{3^3},\frac{1}{3^4}\right\}$ 의 공집합이 아닌 서로 다른 부분집합을 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,\ A_{31}$ 이라 하자. 각 집합 $A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots,A_{31}$ 에서 최소인 원소를 각각 뽑아 이들을 모두 더한 값을 구하면 $\frac{p}{q}$ ($p,q$ 는 서로소) 이다. 이 때, $p-q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 130

해설

㉠ $\frac{1}{3^4}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^4}$ 을 포함하는 $S$ 의 부분집합의 수와 같다.
$\therefore\ 2^4$ 개

㉡ $\frac{1}{3^3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 $S$ 의 부분집합의 수와 같다.
$\therefore\ 2^3$ 개

㉢ $\frac{1}{3^2}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3^2}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^3}$, $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 $S$ 의 부분집합의 수와 같다.
$\therefore\ 2^2$ 개

㉣ $\frac{1}{3}$ 이 가장 작은 원소가 되는 집합의 수는 $\frac{1}{3}$ 은 포함하고 $\frac{1}{3^2}$ , $\frac{1}{3^3}$ , $\frac{1}{3^4}$ 는 포함하지 않은 $S$ 의 부분집합의 수와 같다.
$\therefore\ 2$ 개

㉤ 1이 가장 작은 원소가 되는 경우는 1가지이다.

그러므로 구하는 값은 $\frac{1}{3^4}\times2^4+\frac{1}{3^3}\times2^3+\frac{1}{3^2}\times2^2+\frac{1}{3}\times2+1=\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^1+1=\frac{16+24+36+54+81}{81}=\frac{211}{81}$

$\therefore\ p=211, q=81$ 이므로 $p-q=130$

**48.** 임의의 두 집합 $X, Y$ 대하여
$X♦Y = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^C$ 라고 정의한다. 전체집합 $U = \{x|x \le 50, x$는 자연수$\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x|x$는 3의 배수$\}$ , $B = \{x|x$는 4의 배수$\}$ , $C = \{x|x$는 16의 배수$\}$ 에 대하여 $A♦(B♦C)$ 의 원소의 개수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 20

해설

$X♦Y = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^C = (X \cup Y) - (X \cap Y)$,

$A = \{x|x$는 3의 배수$\}$
$= \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39,$
$42, 45, 48\}$,

$B = \{x|x$는 4의 배수$\}$
$= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48\}$,

$C = \{x|x$는 6의 배수$\}$
$= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$,

$A♦(B♦C) = A♦((B \cup C) - (B \cap C))$
$= A♦\{4, 6, 8, 16, 18, 20, 28, 30, 32, 40, 42, 44\}$
$= \{3, 4, 8, 9, 12, 15, 16, 20, 21, 24, 27, 28, 32,$
$33, 36, 39, 40, 44, 45, 48\}$
$\therefore n(A♦(B♦C)) = 20$

**49.** 집합 $A$, $B$는 연속된 자연수 6개를 원소로 갖는 집합이다. $A$, $B$의 원소의 총합을 $f(A)$, $f(B)$라 할 때, $\left|f(A)-f(B)\right|$를 구하면? (단, $n(A\cap B)=3$ )

① 16　② 17　③ 18　④ 19　⑤ 20

해설

$A=\{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5\}$라 하면
$n(A\cap B)=3$이므로
$B=\{a-3, a-2, a-1, a, a+1, a+2\}$라 할 수 있다.
$f(A)=6a+15$ , $f(B)=6a-3$
$\therefore \left|f(A)-f(B)\right|=|6a+15-6a+3|=18$

**50.** 모든 실수 $x$, $y$에 대하여 $(x+y)^2 \le k(x^2+y^2-xy)$가 성립하기 위한 실수 $k$의 최솟값은?

① $\frac{5}{2}$　② 4　③ $2\sqrt{2}$　④ $3\sqrt{2}$　⑤ $5\sqrt{2}$

해설

ⅰ) $y=0$ 일 때 준식은 $x^2 \le kx^2$
$\therefore k \ge 1 \cdots$㉠

ⅱ) $y \neq 0$ 일 때 양변을 $y^2$으로 나누면 준식은

$$\left(\frac{x}{y}+1\right)^2 \le k\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1-\frac{x}{y}\right\}$$

여기서 $\frac{x}{y}$를 $t$로 치환하면

$$t^2+2t+1 \le k(t^2+1-t)$$
$\therefore (k-1)t^2-(k+2)t+(k-1) \ge 0 \cdots$㉡

㉡ 식이 모든 실수 $t$에 대하여 성립하려면

$k \neq 1$ 일 때 : $k-1>0$

$D=(k+2)^2-4(k-1)^2=-3k(k-4) \le 0$
$\therefore k \ge 4 \cdots$㉢

$k=1$ 일 때 : $-3t \ge 0$ 은 모든 실수 $t$에 대하여 성립할 수 없다.

$\therefore$ ㉠, ㉢에서 구하는 $k$의 범위는 $k \ge 4$