1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

> ㉠ 내림차순으로 정리하면
> $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다.
> ㉡ 오름차순으로 정리하면
> $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.
> ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.
> ㉣ x^3 의 계수는 3이다.
> ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢　　② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡　　④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. a, b는 정수이고, ax^3+bx^2+1이 x^2-x-1로 나누어 떨어질 때, b의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

전개했을 때 양변의 최고차항과 상수항이 같아야 하므로

ax^3+bx^2+1

$=(x^2-x-1)(ax-1)$

$=ax^3-(1+a)x^2+(1-a)x+1$

양변의 계수를 비교하면

$-(1+a)=b, 1-a=0$

$\therefore\ a=1, b=-2$

3. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+8$이 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=-2,\ b=-8$　　② $a=3,\ b=4$

③ $a=-1,\ b=-3$　　④ $a=4,\ b=-2$

⑤ $a=-3,\ b=7$

해설

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+8$로 놓으면
$x-1$과 $x-2$로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1)=0$, $f(2)=0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=2+a+b+8=0,$
$f(2)=16+4a+2b+8=0$

$\therefore\ a+b=-10,\ 2a+b=-12$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-8$

4. 다음 중 다항식 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a + c$ ② $a - b^2$ ③ $a^2 - b^2 + c^2$

④ $a^2 + b^2 + c^2$ ⑤ $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$

$= a^3 - b^3 + (a-b)c^2 - ab(a-b)$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b)c^2 - ab(a-b)$

$= (a-b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab)$

$= (a-b)(a^2 + b^2 + c^2)$

5. 실수 $x,\ y$에 대하여 $(1+i)x+(i-1)y=2i$일 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(1+i)x+(i-1)y=2i$

$(x-y)+(x+y)i=2i$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0,\ x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore\ x=1,\ y=1$

$\therefore\ x+y=2$

6. 임의의 두 복소수 a, b 에 대하여 연산 $\oplus$ 를 $a \oplus b = ab - (a+b)$ 로 정의한다. $\mathrm{Z} = \dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 일 때, $\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}}$ 의 값은?

① 1　　② $1+2i$　　③ $1-2i$

④ -1　　⑤ $2-2i$

해설

$\mathrm{Z} \oplus \overline{\mathrm{Z}} = Z\overline{Z} - (Z + \overline{Z})$, $Z = 2+i$, $\overline{Z} = 2-i$ 이므로 연산을 계산해보면, $5-4=1$ 답은 ①

7. x에 대한 이차방정식 $kx^2+2(k+1)x+k=0$이 중근을 가질 때 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$\frac{D}{4}=b'^2-ac=(k+1)^2-k^2=2k+1$에서

중근을 가질 조건이므로

$\frac{D}{4}=0$이어야 한다.

$2k+1=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

8. $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이다. $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=2$일 때 p^2+q^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

두 근의 합이 3이므로 $p=3$,
두 근의 곱이 2이므로 $q=2$이다.
따라서 $p^2+q^2=9+4=13$

9. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$
② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$
③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$
④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$
⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$
$\therefore x^2+2x+4$
$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$
$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

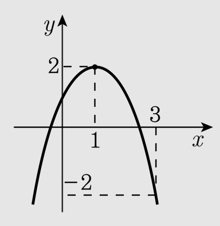
10. x의 범위가 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$
이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.
$\therefore\ M + m = 2 + (-2) = 0$



11. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2}$, $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$ ② $-\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$, $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2}$, $-\frac{13}{2}$, $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

12. 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y-z=1 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x=1$

▷ 정답: $y=2$

▷ 정답: $z=3$

해설

① + ②에서 $3x+2y=7$ $\cdots\cdots$ ④
① + ③에서 $2x+3y=8$ $\cdots\cdots$ ⑤
④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$
이 값을 ①에 대입하면 $z=3$
$\therefore$ $x=1$, $y=2$, $z=3$

13. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m의 값의 합은?

$$m^2x-1>m(x-1)$$

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$m^2x-1>m(x-1)$ 에서

$m^{2x}-1>mx-m$

$\therefore (m^2-m)x>1-m\cdots$㉠

㉠의 해가 없어야 하므로

$m^2-m=0,\ 1-m\geq 0$

$m^2-m=0$에서 $m(m-1)-0$

$\therefore m=0$ 또는 $1\cdots$㉡

$1-m\geq 0$에서 $m\leq 1\cdots$㉢

따라서 ㉡, ㉢에서 $m=0$ 또는 $m=1$

14. 부등식 $x^2-kx+2>0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 범위를 구하면 $a<k<b$이다. 이 때, ab의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$x^2-kx+2>0$이 항상 성립하려면
판별식이 실근을 갖지 않을 때이므로
$D=k^2-4\cdot 2<0$
$k^2-8<0,\ \left(k-2\sqrt{2}\right)\left(k+2\sqrt{2}\right)<0$
$\therefore -2\sqrt{2}<k<2\sqrt{2}$
따라서 $a=-2\sqrt{2},\ b=2\sqrt{2}$이므로
$ab=-2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=-8$

15. 부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 일 때 부등식 $cx^2 - bx + a > 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > -\frac{1}{\beta}$
② $x < -\frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$
③ $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$
④ $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$
⑤ $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 이므로
$a < 0$ 이다. 해가 $0 < \alpha < x < \beta$ 이고
이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$
양변에 a 를 곱하면
$a(x-\alpha)(x-\beta) > 0$
$ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta > 0$
$\therefore\ b = -a(\alpha+\beta),\ c = a\alpha\beta$
따라서 $cx^2 - bx + a > 0$ 에 대입하면
$a\alpha\beta x^2 + a(\alpha+\beta)x + a > 0$
$\alpha\beta x^2 + (\alpha+\beta)x + 1 < 0$
$(\alpha x + 1)(\beta x + 1) < 0$
$\therefore -\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$ $(\because 0 < \alpha < \beta)$

16. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6　② -4　③ -2　④ 0　⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2개씩 나온다.

$(-2x^3\times b)\times 2+(x^2\times ax)\times 2=(-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

17. x에 관계없이 $\frac{x-a}{2x-b}$가 항상 일정한 값을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\frac{x-a}{2x-b}=k$라 놓으면,

$(2k-1)x+(a-bk)=0$

$\therefore\ 2k-1=0,\ a=bk$이므로

$k=\frac{1}{2},\ a=\frac{1}{2}b$이다.

$\therefore\ \frac{b}{a}=2$

18. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$에 대하여 $f(x) - 2$는 $x - 1$로 나누어 떨어지고 $f(x) + 2$는 $x + 1$로 나누어 떨어진다. 이 때, $a - 2b$의 값은 ?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) - 2$ 는 $x - 1$로 떨어지므로
$f(1) - 2 = 0 \ \therefore \ 1 + a + b - 2 = 0$
$\therefore \ a + b = 1 \cdots$①
$f(x) + 2$ 는 $x + 1$로 나누어 떨어지므로
$f(-1) + 2 = 0 \ \therefore \ 1 - a + b + 2 = 0$
$\therefore \ -a + b = -3 \cdots$②
㉠, ㉡ 에서 $a = 2, \ b = -1 \quad \therefore a - 2b = 4$

19. $\dfrac{2004^3 - 2003^3 - 1}{2003 \times 2004}$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2003 = x$ 라 두면 $2004 = x + 1$

$$(\text{준 식}) = \frac{(x+1)^3 - x^3 - 1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{3x(x+1)}{x(x+1)} = 3$$

20. 이차방정식 $x^2-5x+p=0$의 두 근은 $3,\alpha$이고 $x^2-px+q=0$의 두 근은 α,β이다. 이 때 β의 값은?(단 $p,\ q$는 상수)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2-5x+p=0$에서
근과 계수의 관계에 의해
두 근의 합 : $3+\alpha=5 \quad \therefore\ \alpha=2$
두 근의 곱 : $3\cdot\alpha=p=3\cdot2=6$
이차방정식 $x^2-6x+q=0$의 두 근이 $2,\beta$이므로
$2+\beta=6 \quad \therefore\ \beta=4$

21. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha < \beta)$ 이라 하면
α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = 2a \quad \cdots$ ㉠
이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이므로
$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
$(\beta - \alpha)^2 = 4$
$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

22. $\begin{cases} 2x+3y=8 \\ 3y+5z=21 \\ 5z+2x=17 \end{cases}$ 의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$ 일 때, 곱 $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$\begin{cases} 2x+3y=8 & \cdots ㉠ \\ 3y+5z=21 & \cdots ㉡ \\ 5z+2x=17 & \cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(2x+3y+5z)=46$

$2x+3y+5z=23$

㉠ 식에서 $5z=15, z=3$, $y=2$, $x=1$

$\alpha\beta\gamma=1\cdot2\cdot3=6$

23. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y를 구하여 x^2-y^2의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 또는 −12

해설

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$를

㉡식에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=20$, $2x^2-4x+4-20=0$,

$x^2-2x-8=0$, $(x-4)(x+2)=0$

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

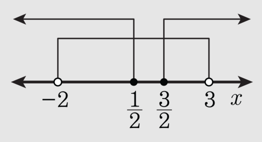
$\therefore$ $x^2-y^2=16-4=12$ 또는 $x^2-y^2=4-16=-12$

24. 다음 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \leq b$ 또는 $c \leq x < d$일 때 $a+b+c+d$의 값은?

① -2 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \to -2 < x < 3 \\ 4x^2 - 8x + 3 \geq 0 \to x \leq \frac{1}{2}, x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$



$-2 < x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} \leq x < 3$

$a = -2$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{2}$, $d = 3$

$\therefore a+b+c+d = 3$

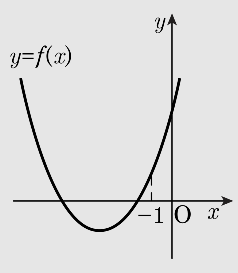
25. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 3개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서

$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$

이상에서 $-7<k<-3$

따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.