1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(-2)$, $\mathrm{B}(4)$ 에 대하여 $\mathrm{P}(-5)$ 일 때, $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

수직선 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여
$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$ 를 구한다.
$\mathrm{A}(-2), \mathrm{B}(4), \mathrm{P}(-5)$ 에 대하여
$\overline{\mathrm{PA}}=|-5-(-2)|=3$, $\overline{\mathrm{PB}}=|-5-4|=9$
$\therefore \overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=3+9=12$

2. 수직선 위의 두 점 P(2), Q(x)에 대하여 P, Q 두 점 사이의 거리가 4일 때, x의 값은 2개이다. 이 중에서 2보다 큰 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x > 2$ 일 때, $x - 2 = 4$

$\therefore\ x = 6$

3. 좌표평면 위의 세 점 $A(-1,\ 2)$, $B(2,\ -3)$, $C(4,\ 3)$에 대하여 다음 중 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$의 대소 관계로 옳은 것은?

① $\overline{CA} < \overline{BC} < \overline{AB}$
② $\overline{CA} < \overline{AB} < \overline{BC}$
③ $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{CA}$
④ $\overline{AB} < \overline{CA} < \overline{BC}$
⑤ $\overline{BC} < \overline{AB} < \overline{CA}$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(2,\ -3)$, $C(4,\ 3)$ 에서
$\overline{AB} = \sqrt{(2+1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{34}$
$\overline{BC} = \sqrt{(4-2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40}$
$\overline{CA} = \sqrt{(-1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$
$\sqrt{26} < \sqrt{34} < \sqrt{40}$ 이므로
$\therefore\ \overline{CA} < \overline{AB} < \overline{BC}$

4. 좌표평면에서 두 점 A(7, 2), B(3, 5) 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 점 A(7, 2), B(3, 5) 사이의 거리는 $\overline{AB} = \sqrt{(3-7)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

5. 두 점 A $(-1,1)$, B $(1,5)$ 에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 좌표는?

① $(3,0)$ ② $(5,0)$ ③ $(0,3)$ ④ $(0,5)$ ⑤ $(0,7)$

해설

y 축 위의 점을 $(0,a)$ 라 하면

$\therefore 1^2+(a-1)^2=1^2+(a-5)^2$ 정리하면

$a=3$

6. 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(1, 6)$, $\mathrm{B}(2, -1)$에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a + b$의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{12}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

(a, b)가 $y = x$ 위에 있으므로 $b = a$

$\sqrt{(a-1)^2 + (a-6)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (a+1)^2}$

$(a-1)^2 + (a-6)^2 = (a-2)^2 + (a+1)^2$

$-2a + 1 - 12a + 36 = -4a + 4 + 2a + 1$

$-12a = -32$

$\therefore\ a = \frac{8}{3}$

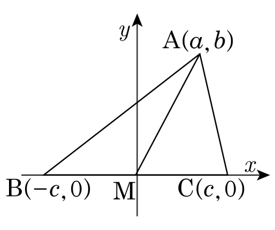
$\therefore\ a + b = a + a = \frac{8}{3} \times 2 = \frac{16}{3}$

7. 세 점 $A(1, 2)$, $B(3, -2)$, $C(-5, -1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인가?

① 이등변 삼각형 ② 예각삼각형
③ $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 ④ $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형
⑤ $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형

해설
$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$\overline{BC} = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{65}$
$\overline{CA} = \sqrt{(1+5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ 에서
$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형 이다.

8. 다음은 $\triangle\mathrm{ABC}$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$을 증명하는 과정이다.



> 직선 BC를 x축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각
> $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(-c,0)$, $\mathrm{C}(c,0)$ 라 하면
> $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2=$(가) 이고,
> $\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$
> 따라서 $\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=$(나)
> $\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=$(다)$(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $a^2+b^2+c^2, a^2+b^2+c^2, 1$

② $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 1$

③ $2(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 2$

④ $2(a^2+b^2+c^2), 2(a^2+b^2+c^2), 2$

⑤ $3(a^2+b^2+c^2), a^2+b^2+c^2, 3$

해설

$\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(-c,0)$, $\mathrm{C}(c,0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$
$=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}$
$=(c^2+2ca+a^2+b^2)+(c^2-2ca+a^2+b^2)$
$=2(a^2+b^2+c^2)$

$\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2, \overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$ 이므로
$\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=a^2+b^2+c^2$
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\,(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$

9. 두 점 A$(-2,-1)$, B$(1,3)$을 잇는 선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 Q의 좌표는?

① $(5,-1)$ ② $\left(\frac{5}{2},5\right)$ ③ $\left(-3,\frac{5}{2}\right)$
④ $\left(\frac{2}{3},-1\right)$ ⑤ $(3,1)$

해설

$\left(\frac{3+2}{3-1},\frac{9+1}{3-1}\right)=\left(\frac{5}{2},5\right)$

10. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(2,\ -1)$, B $(-3,\ 5)$, C $(a,\ b)$이고 무게중심의 좌표가 G $(-1,\ 1)$일 때, a와 b의 차 $a-b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

세 점을 알 때 무게중심을 구하는 공식에서

$\{2+(-3)+a\} \div 3 = -1$

$\therefore a = -2$

$\{(-1)+5+b\} \div 3 = 1$

$\therefore b = -1$

따라서, $a-b$의 값은 $-2-(-1) = -1$

11. 세 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(1, b)$, $\mathrm{C}(3, 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2, 1)$일 때, ab의 값은?

① -4　　② -3　　③ -2　　④ 3　　⑤ 4

해설

무게중심의 좌표가 $\mathrm{G}(2, 1)$이므로

$\dfrac{a+1+3}{3} = 2$, $\dfrac{4+b+1}{3} = 1$

$a + 4 = 6 \quad \therefore a = 2$

$b + 5 = 3 \quad \therefore b = -2$

$\therefore ab = 2 \times (-2) = -4$

12. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$
$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$
$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

13. 두 점 $\mathrm{A}(0,3)$, $\mathrm{B}(5,-2)$로부터 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(1,0)$ ② $(2,0)$ ③ $(3,0)$ ④ $(4,0)$ ⑤ $(5,0)$

해설

점 P를 $(\alpha,0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$이므로, $\alpha^2+9=(\alpha-5)^2+2^2$

$\therefore\ \alpha=2$

$\therefore\ \mathrm{P}=(2,0)$

14. $\triangle ABC$에서 $A(6,\ 1)$, $B(-1,\ 2)$, $C(2,\ 3)$이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 $P(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$
$\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a - b - 16 = 0,\ 2a - b - 6 = 0$

연립하여 풀면 $a = 2,\ b = -2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$

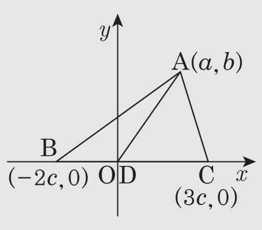
$\therefore \overline{PA} = 5$

15. $\triangle$ABC에서 변 BC를 2 : 3으로 내분하는 점을 D라 할 때, $3\overline{\mathrm{AB}}^2 + 2\overline{\mathrm{AC}}^2 = k\left(3\overline{\mathrm{AD}}^2 + 2\overline{\mathrm{DC}}^2\right)$을 만족시키는 상수 k의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 5

해설

다음 그림과 같이 변 BC를 x축 위에, 점 D를 원점이 되도록 좌표축을 정하고, 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2c, 0)$, $\mathrm{C}(3c, 0)$이라 하면



$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (a+2c)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 4c^2 + 4ca$

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = (a-3c)^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 9c^2 - 6ca$

$\therefore 3\overline{\mathrm{AB}}^2 + 2\overline{\mathrm{AC}}^2 = 5(a^2 + b^2 + 6c^2) \cdots$ ㉠

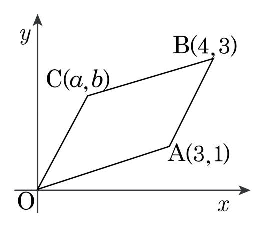
또한 $\overline{\mathrm{AD}}^2 = a^2 + b^2$, $\overline{\mathrm{DC}}^2 = 9c^2$

$\therefore 3\overline{\mathrm{AD}}^2 + 2\overline{\mathrm{DC}}^2 = 3(a^2 + b^2 + 6c^2) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $3\overline{\mathrm{AB}}^2 + 2\overline{\mathrm{AC}}^2 = \frac{5}{3}\left(3\overline{\mathrm{AD}}^2 + 2\overline{\mathrm{DC}}^2\right)$

$\therefore k = \frac{5}{3}$

16. 다음 그림과 같이 네 점 A(3, 1), B(4, 3), C(a, b), O(0, 0)을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

$\left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2} = 2$에서 $a = 1$

$\frac{b+1}{2} = \frac{3}{2}$ 에서 $b = 2$

$\therefore a + b = 3$

17. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 G(2, −1) 이고 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.

삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로

$\frac{a+3}{3}=2$ 에서 $a=3$

또 $\frac{1+b}{3}=-1$ 에서 $b=-4$

$\therefore\ a+b=-1$

18. 네 점 O(0, 0), A(3, 1), B(4, 3), C(a, b)를 꼭짓점으로 하는 □OABC가 평행사변형일 때, $a+b$의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선 OB, AC의 중점이 일치하므로

$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$

$\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=2$

$\therefore\ a+b=3$

19. $\triangle$ABC 의 세변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2,\ 7)$, $(-6,\ 4)$, $(5,\ -2)$일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$A(a_1,\ b_1)$ $B(a_2,\ b_2)$ $C(a_3,\ b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2}\right)$,

$\left(\frac{a_2+a_3}{2},\ \frac{b_2+b_3}{2}\right)$,

$\left(\frac{a_3+a_1}{2},\ \frac{b_3+b_1}{2}\right)$ 이고

이들의 합을 3 으로 나누면,

$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$ 로

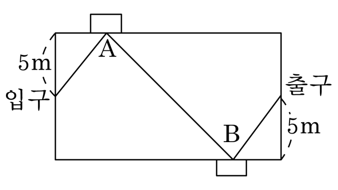
$\triangle$ABC 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$G = \left(\frac{-2-6+5}{3},\ \frac{7+4-2}{3}\right) = (-1,\ 3)$

$\therefore$ 2

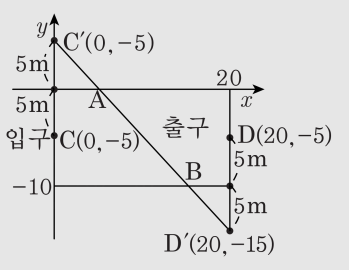
20. 다음 그림과 같은 전시장에서 관광객이 전시물을 보기 위한 이동 거리를 최소로 하려한다. 전시물 A, B가 있을 때, 전시물 A의 위치는 왼쪽에서 몇 m떨어져 있어야 하는지 구하여라.(단, 이 전시장은 가로 20 m, 세로 10 m인 직사각형 모양이다.)



▶ 답: ____ m

▷ 정답: 5 m

해설



전시장의 입구를 점 C(0, -5), 출구를 점 D(20, -5)라 하자.
점 C(0, -5)를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 C′(0, 5)
점 D(20, -5)를 직선 $y=-10$에 대해 대칭이동한 점은 D′(20, -15)이다.
이 때, 직선 C′D′의 방정식은 $y=-x+5$이다.
점 A의 좌표는 직선 C′D′이 x축과 만나는 점이므로 (5, 0)이다.
따라서, 왼쪽에서 5 m 떨어진 곳에 전시물 A가 위치해야 한다.