

1. 다음 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\text{ } x^2 + \text{ } x + \text{ }) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + \text{ } x + \text{ } = A$ 라 하면

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$$

$$\therefore A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$$

$$\therefore A = x^2 + 2x - 1 \text{ 이므로}$$

안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1 이다.

2. 사차식 $3x^4 - 5x^2 + 4x - 7$ 을 이차식 A 로 나누었더니 몫이 $x^2 - 2$ 이고 나머지가 $4x - 5$ 일 때, 이차식 A 를 구하면?

① $3x^2 - 2$

② $3x^2 - 1$

③ $3x^2$

④ $3x^2 + 1$

⑤ $3x^2 + 2$

해설

$$\text{검산식} : 3x^4 - 5x^2 + 4x - 7 = A(x^2 - 2) + 4x - 5$$

$$A = \frac{3x^4 - 5x^2 - 2}{x^2 - 2} = 3x^2 + 1$$

3. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

4. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned}(x + 1)(y + 1)(z + 1) \\&= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \\&= 7\end{aligned}$$

5. 두 다항식 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$, $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a , b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하면?

① -21

② -15

③ -5

④ -1

⑤ 0

해설

$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.

따라서 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore a = b \quad \therefore a - b = 0$

6. $a = 2004$, $b = 2001$ 일 때, $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ 의 값은?

① 21

② 23

③ 25

④ 27

⑤ 29

해설

준 식은 $(a - b)^3$ 이다.

$$a - b = 2004 - 2001 = 3$$

$$\therefore (a - b)^3 = 3^3 = 27$$

7. 상수 a, b 에 대하여 다음 등식이 항상 성립할 때, $2a + b$ 의 값은?

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} = \frac{6(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

① 2

② 3

③ 5

④ 7

⑤ 9

해설

등식이 항상 성립하기 위해서는 (분모) $\neq 0$ 이어야 한다.

양변에 공통분모인 $(x-1)(x+3)$ 을 곱하면,

$$a(x+3) + b(x-1) = 6(x+1)$$

$$(a+b)x + (3a-b) = 6x+6$$

$$\therefore a+b=6, 3a-b=6$$

두 식을 연립하여 풀면,

$$a=3, b=6-a=3$$

$$\therefore 2a+b=2 \times 3 + 3 = 9$$

8. $f(x)$ 가 x 의 다항식일 때 $(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 가 x 에 대한 항등식이 될 때 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$(x^2 - 2)(x^4 + 1)f(x) = x^8 + ax^4 + b$ 에서

$x^2 = 2$ 를 대입하면 $0 = 16 + 4a + b \cdots \textcircled{1}$

$x^4 = -1$ 을 대입하면 $0 = 1 - a + b \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3$, $b = -4$

$\therefore a + b = -7$

9. $(m^2 - 4)x - 1 = m(3x + 1)$ 를 만족하는 x 가 없도록 하는 상수 m 의 값은?

① -1

② -2

③ -4

④ 4

⑤ 5

해설

$(m^2 - 3m - 4)x - 1 - m = 0$ 의 해가 없으므로

$m^2 - 3m - 4 = 0$ 이고 $-m - 1 \neq 0$

$\therefore m = 4$

10. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $(a, b, c) = ab + bc$ 로 정의한다. 이때, 등식 $(x, a, y) - (2x, b, y) = (x, 2, y)$ 이 임의의 실수 x, y 에 대하여 성립하도록 a, b 의 값을 정하면?

① $a = 1, b = 2$

② $a = 2, b = 2$

③ $a = 2, b = 0$

④ $a = 0, b = 2$

⑤ $a = 0, b = 0$

해설

기호의 정의에 따라서 주어진 식을 다시 쓰면

$$(ax + ay) - (2bx + by) = 2x + 2y$$

이 식을 x, y 에 대하여 정리하면

$$(a - 2b - 2)x + (a - b - 2)y = 0$$

이 등식이 임의의 x, y 에 대하여 성립하므로

$$a - 2b - 2 = 0, a - b - 2 = 0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

11. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 3$ 을 $x^2 - x - 12$ 로 나눈 나머지가 $14x - 9$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

몫을 $Q(x)$ 라 하면

$$x^3 + ax^2 + bx + 3$$

$$= (x^2 - x - 12)Q(x) + 14x - 9$$

$$= (x - 4)(x + 3)Q(x) + 14x - 9$$

$x = 4$, $x = -3$ 을 각각 대입하면

$$16a + 4b + 67 = 47 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$9a - 3b - 24 = -51 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = 3$

$$\therefore a + b = 1$$

12. x 에 관한 항등식 $(x^2 + x + 1)^5 = a_{10}(x+1)^{10} + a_9(x+1)^9 + \cdots + a_1(x+1) + a_0$ 에서 $a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 16

④ 32

⑤ 64

해설

주어진 식에 $x = 0$ 을 대입하면

$$(0 + 0 + 1)^5 = a_{10} + a_9 + \cdots + a_1 + a_0$$

$$\therefore a_0 + a_1 + \cdots + a_9 + a_{10} = 1$$

13. x^3 의 계수가 1인 삼차다항식 $f(x)$ 가 $x-1$ 을 인수로 갖고, x^2+2 로 나누었을 때의 나머지는 $x+5$ 이다. 이 때, $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① -1

② 1

③ 3

④ 5

⑤ 7

해설

x^3 의 계수가 1이므로

$$f(x) = (x^2 + 2)(x + \alpha) + x + 5 \cdots \textcircled{1}$$

$x-1$ 의 인수를 가지므로, $f(1) = 0$

①에 넣어 계산하면,

$$f(1) = 3(1 + \alpha) + 6 = 0, \alpha = -3$$

$$\therefore f(2) = (2^2 + 2)(2 - 3) + 2 + 5 = 1$$

14. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x + 1$ 로 나누면 나머지가 -5 이고, $x - 2$ 로 나누면 나머지가 1 이라고 한다. 이 때, 상수 m, n 에 대하여 $m + n$ 은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 1$ 이 라 하면,

$$f(x) = (x + 1)Q_1(x) - 5$$

$$f(x) = (x - 2)Q_2(x) + 1$$

$$\therefore f(-1) = -1 + m - n + 1 = -5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 1$$

$$m = -3, \quad n = 2$$

따라서 $m + n = -1$ 이다.

15. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - x$ 로 나누면 3이 남고 $x^2 + x - 6$ 로 나누면 $x - 1$ 이 남을 때, $f(x)$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때의 나머지를 $R(x)$ 라 할 때, $R(1)$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ -2

⑤ -3

해설

$$f(x) = x(x-1)Q_1(x) + 3$$

$$f(x) = (x-2)(x+3)Q_2(x) + x-1$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

$$f(1) = 3, f(2) = 1 \text{ 이므로}$$

$$a + b = 3, 2a + b = 1$$

$$\text{연립하여 풀면, } a = -2, b = 5$$

$$\therefore (\text{구하는 나머지}) R(x) = -2x + 5$$

$$\therefore R(1) = 3$$

16. x 에 대한 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 나머지는 -5 이고, $x-1$ 로 나눈 나머지는 -1 이다. 이때, $f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)$ 로 나눈 나머지를 구하면?

① $2x+1$

② $2x+3$

③ $2x-1$

④ $2x$

⑤ $2x-3$

해설

$f(x)$ 를 $(x+1)(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ 라 하면

$$f(x) = (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$$

한편, $f(x)$ 를 $x+1$, $x-1$ 로 나눈 나머지가 각각 -5 , -1 이므로

$$f(-1) = -a + b = -5, \quad f(1) = a + b = -1$$

이것을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $2x-3$ 이다.

17. $x^5 + x + 1$ 을 $x + 1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$ 라고 할 때, $Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) + R$$

$x = -1$ 을 양변에 대입하면 $R = -1$

$$\therefore x^5 + x + 1 = (x + 1)Q(x) - 1 \cdots \textcircled{7}$$

$Q(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 나머지는 $Q(1)$

$$\textcircled{7} \text{에 } x = 1 \text{을 대입하면 } 3 = 2Q(1) - 1$$

$$\therefore Q(1) = 2$$

18. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x+1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x + 1$

② $-x + 3$

③ $x - 1$

④ $2x$

⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x + 2)(x - 2)P(x) - x + 4 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-2) = 6, f(2) = 2$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 3)(x - 1)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$$x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) = -3a + b = 6$$

$$x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) = a + b = 2$$

$$\therefore a = -1, b = 3$$

따라서 나머지는 $-x + 3$

19. 다항식 $f(x) = x^2 + ax + b$ 에 대하여 $f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어 떨어지고, $f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어진다. 이 때, $a - 2b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) - 2$ 는 $x - 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(1) - 2 = 0 \therefore 1 + a + b - 2 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$f(x) + 2$ 는 $x + 1$ 로 나누어떨어지므로

$$f(-1) + 2 = 0 \therefore 1 - a + b + 2 = 0$$

$$\therefore -a + b = -3 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } a = 2, b = -1$$

$$\therefore a - 2b = 4$$

20. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-3$ 로 나누었을 때 몫과 나머지를 다음과 같은 조립제법으로 구하려고 한다. $a + b + c + d + k$ 의 값을 구하면?

k	1	a	-1	b
		c	d	33
	1	4	11	37

① 19

② 20

③ 21

④ 22

⑤ 23

해설

다항식 $x^3 + ax^2 - x + b$ 를 $x-3$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

3	1	a	-1	b
		3	$3a + 9$	$9a + 24$
	1	$a + 3$	$3a + 8$	$9a + b + 24$

이때 $k = 3$, $c = 3$, $a + 3 = 4$, $3a + 9 = d$, $9a + b + 24 = 37$
 이므로

$$k = 3, c = 3, a = 1, d = 12, b = 4$$

$$\text{따라서 } a + b + c + d + k = 1 + 4 + 3 + 12 + 3 = 23$$

21. 다음 중 $(x+y)^3 - 8y^3$ 의 인수인 것은?

① $x^2 - 2xy - 4y^2$

② $x^2 - 2xy + 4y^2$

③ $x^2 + 2xy + 4y^2$

④ $x^2 - 4xy - 7y^2$

⑤ $x^2 + 4xy + 7y^2$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x+y)^3 - (2y)^3 \\&= \{(x+y) - 2y\}\{(x+y)^2 + (x+y)2y + (2y)^2\} \\&= (x-y)(x^2 + 2xy + y^2 + 2xy + 2y^2 + 4y^2) \\&= (x-y)(x^2 + 4xy + 7y^2)\end{aligned}$$

22. $(x+1)^2 + (x+1)(y+2) - 6(y+2)^2$ 의 인수를 구하면?

① $x - 2y + 3$

② $x - 2y - 3$

③ $x + 2y - 3$

④ $x + 3y - 7$

⑤ $x - 3y + 7$

해설

$x+1=a$, $y+2=b$ 라 하면

$$(x+1)^2 + (x+1)(y+2) - 6(y+2)^2$$

$$= a^2 + ab - 6b^2$$

$$= (a - 2b)(a + 3b)$$

$$= \{(x+1) - 2(y+2)\} \{(x+1) + 3(y+2)\}$$

$$= (x+1-2y-4)(x+1+3y+6)$$

$$= (x-2y-3)(x+3y+7)$$

23. $x^4 - 3x^2 + 1$ 을 인수분해 하면?

- ① $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ ② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$
③ $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - x - 1)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x - 1)$
⑤ $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^2 + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)\end{aligned}$$

24. 다항식 $2x^2 - xy - y^2 - 4x + y + 2$ 를 인수분해 한 식은?

① $(2x - y - 2)(x + y - 1)$

② $(2x + y + 2)(x - y + 1)$

③ $(2x - y - 2)(x - y - 1)$

④ $(2x + y - 2)(x + y - 1)$

⑤ $(2x + y - 2)(x - y - 1)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= 2x^2 - (y + 4)x - (y^2 - y - 2) \\&= 2x^2 - (y + 4)x - (y + 1)(y - 2) \\&= \{2x + (y - 2)\}\{x - (y + 1)\} \\&= (2x + y - 2)(x - y - 1)\end{aligned}$$

25. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ 을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$

④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc(c-b) \\&= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\&= (c-b)(a-b)(a-c) \\&= (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

26. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ 을 인수분해 했을 때 인수가 아닌 것은?

① $x - 1$

② $x + 1$

③ $x + 2$

④ $(x - 1)^2$

⑤ $(x + 1)^2$

해설

조립제법을 이용한다.

1	1	1	-3	-1	2
		1	2	-1	-2
1	1	2	-1	-2	0
		1	3	2	
-1	1	3	2	0	
		-1	-2		
-2	1	2	0		
		-2			
	1	0			

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$$

27. 서로 다른 세 실수 x, y, z 에 대하여 $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ 를 만족할 때, $x + y + z$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$(x + y + z) = 0 \text{ 또는 } x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$\therefore x + y + z = 0 \text{ 또는 } \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} = 0$$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수($x \neq y \neq z$)이므로

$$x + y + z = 0$$

28. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형

② 이등변삼각형

③ 정삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 둔각삼각형

해설

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \text{에서}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0$$

a, b, c 는 실수이므로

$$a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

29. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답: 개

▷ 정답: 49 개

해설

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a + 1)^3$$

$$\therefore N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$$

$$= (35 + 1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$$

$$\therefore \text{약수의 개수} = (6 + 1) \times (6 + 1) = 49$$

30. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + y)(y + z)(z + x)$ 의 값은?

①

-1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$x + y + z = 1$ 을 변형하면

$$(\text{준식}) = (1 - z)(1 - x)(1 - y)$$

$$= 1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx) - xyz$$

$$= 1 - 1 + 2 - 3 = -1$$

31. $a = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$ 이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a 의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$ 이다. 이 때, $k+l+m$ 의 값을 구하면?

① 2046

② 2047

③ 2048

④ 2049

⑤ 2050

해설

$$a = (3+1)(3^2+1)\cdots(3^{1024}+1)$$

양변에 $(3-1)$ 을 곱하면

$$(3-1)a = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1)$$

$$\begin{aligned} 2a &= (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\ &= (3^4-1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1) \\ &= (3^8-1)\cdots(3^{1024}+1) \end{aligned}$$

$\vdots$

$$= (3^{2048}-1)$$

양변을 2로 나누면

$$a = \frac{1}{2}(3^{2048}-1)$$

$$\therefore k=2, l=2048, m=-1$$

$$\therefore k+l+m=2049$$

32. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은 ?

$$\textcircled{1} (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{2} \{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$\textcircled{3} (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\textcircled{4} (x+a)(x+b)(x+c)$$

$$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$$

$$\textcircled{5} (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a , b , c 라 하면 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 28$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 28^2 \dots \textcircled{㉠}$$

또, 모든 모서리의 길이의 합은 176이므로

$$4(a+b+c) = 176$$

$$\therefore a+b+c = 44 \dots \textcircled{㉡}$$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$ 이므로

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \dots \textcircled{㉢}$$

따라서 ㉠, ㉡을 ㉢에 대입하여 겉넓이를 구하면 1152이다.

33. $x - \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$

② $\pm 5\sqrt{5}$

③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \text{에서}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2 = 3 \text{에서}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \pm \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \pm 5\sqrt{5} - 3(\pm \sqrt{5}) = \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 3(\pm 2\sqrt{5}) - (\pm \sqrt{5}) = \pm 5\sqrt{5}$$

34. 모든 실수 x 에 대하여 등식 $x^{100} - 1 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_{100}(x-1)^{100}$ 이 성립할 때, $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 2^m + k$ 이다. $m + k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 98

해설

$x = 0$ 을 대입하면

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{100} = -1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$x = 2$ 를 대입하면

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 2^{100} - 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}: 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100}) = 2^{100} - 2$$

$$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{100} = 2^{99} - 1$$

$$\therefore m = 99, k = -1 \text{ 이므로 } m + k = 98$$

35. 다항식 $f(x)$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$ 를 다시 $x+3$ 으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는?

① 10

② -10

③ 9

④ -9

⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$ 를 $x+3$ 으로 나눈 나머지는 $f(-3)$ 이다.

$f(x) = (x-2)Q(x) + 5$ 에서

$x = -3$ 을 대입하면 $f(-3) = (-3-2)Q(-3) + 5$

$Q(x)$ 를 $x+3$ 으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3) = 3$

$\therefore f(-3) = -10$

36. 1000^{10} 을 1001 로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R 라 할 때, 다음 중 나머지 R 를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x - 1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x + 1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x - 1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x + 1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$ 에서 $1000 = x$ 라 하면

$$x^{10} = (x + 1)Q(x) + R$$

$x = -1$ 을 대입하면 $R = 1$ 을 구할 수 있다.

37. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$$[x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y]$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned} & x^3 - y^3 + x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x - y \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + xy(x-y) + 2(x+y)(x-y) + (x-y) \\ &= (x-y)\{(x+y)^2 + 2(x+y) + 1\} \\ &= (x-y)(x+y+1)^2 \\ & p = -1, q = 1, r = 1 \\ & \therefore p^2 + q^2 + r^2 = 3 \end{aligned}$$

38. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n 은 자연수)

① 2

② $2(a+b)^n$

③ 4

④ $4(a+b)^n$

⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로

합차공식을 사용하여 정리하면

$$(\text{준식}) = 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2 - b^2)^n = 4$$

39. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 가 $b^3 - ac^2 + a^2b + ab^2 + a^3 - bc^2 = 0$ 인 관계를 만족할 때, 이 삼각형의 모양은?

① 정삼각형

② 직각삼각형

③ 이등변삼각형

④ 둔각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

차수가 가장 낮은 c 에 대한 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

$$-(a+b)c^2 + a^3 + a^2b + b^3 + ab^2 = 0$$

$$-(a+b)c^2 + a^2(a+b) + b^2(a+b) = 0$$

$$-(a+b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$(a+b \neq 0)$$

$$c^2 - a^2 - b^2 = 0$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$\therefore C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

40. $a(a+1) = 1$ 일 때, $\frac{a^6 - 1}{a^4 - a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^6 - 1}{a^4 - a^2} &= \frac{(a^3 + 1)(a^3 - 1)}{a^2(a^2 - 1)} \\&= \frac{(a + 1)(a^2 - a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)}{a^2(a + 1)(a - 1)} \\&= \frac{(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)}{a^2} \leftarrow a^2 = 1 - a \text{ 대입} \\&= \frac{2(1 - a) \times 2}{1 - a} = 4\end{aligned}$$